

Delineação de Depósitos Minerais

J. H. Grossi Sad & Jorge M. G. P. Valente

$$\frac{y_0 - y_n}{2} (y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_{1/2} + y_{3/2} + y_{n-1/2}) \left] \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} [y_1 + y_2 + \dots + y_n] \right.$$

$$\frac{t_3 a_3 + t_4 a_4}{a_1 + a_4} V = \frac{H}{n} \left(\frac{3}{8} S_0 + \frac{7}{6} S_1 + \frac{23}{24} S_2 + S_3 + \dots + S_{n-3} + \frac{23}{24} S_{n-2} + \frac{7}{6} S_{n-1} + \frac{3}{8} S_n \right) S$$

$$+ y_{n-3} + \frac{23}{24} y_{n-2} - \frac{7}{6} y_{n-1} - \frac{3}{8} y_n \left| t_m = \frac{t_1 + a_1 + t_2 + a_2 + t_3 a_3 + t_4 a_4}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4} \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} [y_1 + y_2 + \dots + y_n] \right.$$

Delineação de Depósitos Minerais

Delineação de Depósitos Minerais

J. H. Grossi Sad & Jorge M. G. P. Valente

Delineação de Depósitos Minerais

J. H. Grossi Sad (Grossi & Torres Consultoria S/C Ltda.)

&

Jorge Manuel da Gama Pinto Valente (Valente Consultoria & Serviços Ltda.)



Belo Horizonte
Setembro de 2007

© 2007, J. H. Grossi Sad &
Jorge Manuel da Gama Pinto Valente

Todos os direitos reservados.

A duplicação ou reprodução parcial deste volume por quaisquer meios (eletrônico, mecânico, gravação, fotocópia, distribuição na Internet e outros) só poderá ser feita mediante autorização prévia dos autores.



Geosol Geologia e Sondagens Ltda
Rua São Vicente 255 Bairro Olhos D'Água
CEP 30390-570 Belo Horizonte, MG
(31) 3288-1122 Fax: (31) 3288-1140
www.geosol.com.br - geosol@geosol.com.br

Desenhos técnicos: Adelson Reis Neto

Projeto gráfico: Walfredo Novais Pinto Filho

Editoração: DPI Design Ltda

Impressão e acabamento: Rona Editora Ltda

Sad, João Henrique Grossi

Delineação de depósitos minerais / João Henrique
Grossi Sad, Jorge Manuel Valente. – Belo Horizonte:
Rona Editora, 2007.

272p. : il

1. Pesquisa mineral. I. Valente, Jorge Manuel. II. Título.

CDU: 55:31

Agradecimentos

Os autores agradecem ao Eng. Claret Antunes Campos as contribuições constantes no Capítulo 5 (Métodos de delineação – Técnicas de construção dos contornos). As figuras 5.22 [B / C], 5.23 [B / C / D] e 5.24 [B / C / D] foram também preparadas pelo Eng. Claret bem como a seção Validação cruzada no capítulo citado.

A presente edição foi realizada com o apoio da GEOSOL Geologia e Sondagens Ltda. e da Fundação Victor Dequech, através do empenho dos presidentes das duas instituições, respectivamente, Claret Rodrigues da Cunha e Eurípedes Palazzo Silva, a quem os autores manifestam os seus agradecimentos.

Conteúdo

Agradecimentos	ix
Apresentação	xv
1. Introdução	19
Princípios da delineação	20
Regras de Interpretação	24
Regra das Variações Graduais	25
Regra da Área de Influência	25
Inferência	27
Procedimento Empírico	27
Nota sobre variabilidade	28
Pesquisa, jazida e corpo minerais	28
Mineralogia e composição dos depósitos minerais	31
2. As mineralizações e sua investigação	33
Meios de exploração e aplicabilidade	33
Fundamentos sobre a amostragem	35
Delineação dos corpos minerais	36
Sistemas exploratórios	38
Modelagem	41
Otimização da pesquisa	42
Utilização dos dados da pesquisa mineral	47
Requerimentos e critérios para cálculos	47
Critérios para seleção de métodos	48
Procedimentos	48
Exemplos de representação de dados de exploração	49
Projeções estereográfica e isométrica	50
Diagramas direcionais	54

3. Cálculos para a determinação dos parâmetros dos corpos minerais	55
Delineação, interpolação, e extrapolação	55
Delimitação projetando-se dados de sondagem em um plano de referência, horizontal	56
Delimitação com construção de seções geológicas e seu rebatimento em planos vertical e horizontal	56
Delimitação utilizando observação direta do contato	56
Delimitação em uma galeria projetada em um plano horizontal	58
Delimitação de um corpo mineralizado através de extrapolação	58
Delimitação completa do depósito, explorado por retículo regular de serviços	61
Determinação da espessura	61
Determinação da área	63
Determinação do volume	72
Volume entre duas seções paralelas horizontais ou verticais	72
Fórmula de Euler-McLaurin	73
Método das Isolinhas	73
Método dos Prismas Poligonais	75
Métodos dos Fatores Médios	75
Método das Seções	81
Método da janela móvel	83
Método dos prismas triangulares	83
Método dos blocos de Lavra	84
Determinação do peso	89
Fator tonelagem	89
Densidade	90
Determinação do teor	90
4. Fatores condicionantes da delineação	103
Planejamento: via maximizante ou via estacionária?	104
Planejamento a longo e médio prazos	105
Planejamento a curto prazo	105
Lavra a céu aberto ou subterrânea?	106
Relação de mineração limite (relação estéril / minério)	106
Teor de corte (céu aberto)	109
Teor mínimo ou marginal (céu aberto)	115
Teor de utilização (céu aberto)	121
Teor limite ou teor de corte subterrâneo	122
Comentários e conclusões sobre os fatores examinados	123
Beneficiamento e recuperação	124
Acumulação e contorno industrial	125
Largura mínima de lavra (LML)	127

Arquitetura do corpo mineral e delineação	128
Depósitos entratiformes	128
Depósitos alongados.	129
Depósitos equidimensionais	129
Depósitos inconstantes.	129
Diluição	130
5. Métodos de delineação	133
Traçagem contínua.	133
Interpolação.	134
Interpolação e contornos	135
Técnicas de construção dos contornos	138
Simulação condicional	156
Validação cruzada.	166
Ponderação e interpolação	167
Extrapolação	170
Extrapolação limitada	172
Extrapolação ilimitada	172
6. Verificação da otimalidade do retículo exploratório.	177
Elementos de otimização	177
Analogia.	180
Métodos estatísticos.	180
Métodos geoestatísticos.	181
Adensamento.	190
7. Descontinuidade e heterogeneidade dos depósitos minerais	195
8. Erros e sua determinação	201
Erros de interpretação	201
Erros técnicos	201
Erros casuais (aleatórios).	202
Erros sistemáticos.	207
9. Uso da parametrização na delineação.	213
Introdução a parametrização	213
Teor de corte	214
Seleção de reservas.	216
Alternativas para otimização.	220

A decisão de parar a pesquisa geológica	226
A parametrização de uma jazida	230
Característica ótima de uma jazida	230
A prática das rejeições	232
10. Uso da tipologia na delineação	239
Tipologia e análise grupal	239
Generalidades	239
Metodologia	239
Dissimilaridade	240
Dendograma	240
Nota sobre a escolha das variáveis	241
Tipologia e análise vário-grupal	242
Introdução	242
Conceitos básicos prévios	242
O variograma corrente	243
Ilustração da técnica	243
Curvas características	245
Interpretação geo-estrutural por análise vário-grupal	246
Análise vário-grupal como instrumento de decisão em campanha de sondagens	261
Experiência brasileira em análise grupal	270
Notas finais	270
Bibliografia	271

Apresentação

No presente trabalho os autores prepararam texto que apresenta temas relacionados aos princípios, fatores e métodos relacionados à delineação dos depósitos minerais, assuntos abordados por diversos autores; contudo, essas abordagens não tratam de modo sistemático e abrangente as questões de delineação.

A correta delineação de um depósito mineral tem como base a determinação do comportamento espacial do mesmo, em termos de forma, tamanho e atitude, de tal modo que a interrelação e a configuração entre esses parâmetros e o retículo de exploração são precisamente estabelecidas.

O trabalho destina-se aos estudantes de graduação e pós-graduação dedicados à exploração mineral e, também, aos geólogos, engenheiros geólogos e engenheiros de minas, como texto de consulta.

A utilização de métodos matemáticos foi a que julgamos necessária e ao alcance dos estudantes e profissionais.

Sempre que elucidativo, apresentam-se exemplos de cálculos, por diferentes métodos, de tal modo que o leitor pode avaliar as vantagens e desvantagens dos mesmos e a mais adequada a aplicação de um dado método, em relação a outro. É claro que a falta de conhecimento e de experiência pode transformar o procedimento de delineação em mero exercício de geometria, o procedimento depende da familiaridade que o geólogo tem com o tipo de depósito sob investigação.

Quando se utilizam métodos computadorizados para

proceder à delineação, o executor do trabalho deve ter em mente a necessidade de entender o que se está a fazer, ou seja, não é o apertar de teclas que produz resultados corretos.

A determinação de intersecções potencialmente econômicas, à medida que são geradas durante a exploração mineral faz com que se possa avaliar continuamente a investigação em curso.

A delineação de um depósito mineral tem como escopo o estabelecimento dos limites econômicos do mesmo, isto é, segregam-se tratos economicamente aproveitáveis daquelas estéréis. A exploração fornece dados para se determinar a posição do depósito, sua arquitetura, sua estrutura, seu tamanho, a qualidade e quantidade de porções potencialmente mineralizadas, que serão consideradas como minério ou estéril, a partir de condicionantes econômicas.

A delineação é baseada em observação e em inferência; neste último caso aplicam-se procedimentos de dedução. É suportada a delineação por três princípios: acumulação gradual de dados (ou aproximação sucessiva), previsão-verificação geológicas e exploração integrada (ou totalização da informação).

Os seguintes fatores são discutidos no condicionamento da delineação: largura mínima de lavra, teor de corte, recuperação, teor de corte em minérios complexos, teor mínimo de lavra, estéril, acumulação metálica, relação estéril-minério, arquitetura do corpo e diluição.

No trabalho mostra-se a importância que o conhe-

cimento geológico têm na delineação dos depósitos minerais, que envolve conhecimento da paragéneses mineral, da granulometria, do grau de liberação, dos teores, do grau de heterogeneidade na distribuição dos elementos, da arquitetura e trama, da dimensão, da topografia, da hidrogeologia e da estabilidade de solos e rochas, etc.

Os fatores econômicos envolvem custos para produzir o minério, valor de venda e mercado, disponibilidade de mão-de-obra, concentração e metalurgia, recuperação, política fiscal, estabilidade econômica, custos de barragens, de tratamento de água e de recuperação ambiental, além do custo do capital.

São apresentados os três métodos utilizados para delimitação, a partir dos fatores empregados para a mesma: traçagem contínua, interpolação dos limites e extrapolação limitada ou ilimitada.

A traçagem contínua dos limites de um depósito mineral, aflorante ou não aflorante, é relativamente simples quando o contato estéril-minério é brusco e observado a olho desarmado. Por outro lado, serviços exploratórios podem detectar tal contato. Quando ocorre transição entre minério e estéril, o limite se baseia em amostragem contínua, usando-se, por exemplo, um teor de corte como fator.

A interpolação é um método empregado com base em seções horizontais e verticais. A construção dos pontos chave é feita usando a regra da igual área de influência (o limite é o ponto médio entre dois serviços positivos) ou a regra da variação gradual, quando se admite que a

propriedade varia de modo contínua e linear. A interpolação pode ser praticada com ajuda da construção de contornos (ou isolinhas), que é um meio universal de representar o modo de variação da propriedade sob exame. Os pontos de controle ou de observação das propriedades podem se distribuir de modo irregular ou de modo regular (segundo retículo). A interpolação pode ser feita diretamente, quando a distribuição é irregular ou, quando necessário ou conveniente, se pode construir um arranjo regular.

A observação dos intervalos interpolados, que permitem a construção dos contornos é feita manualmente ou mecanicamente; técnicas mais elaboradas de obtenção dos intervalos envolve inverso da distância, inverso do quadrado da distância, análise de tendência, média móvel e krigagem. Exemplos comparativos de construção de mapas (ou de seções) usando técnicas diferentes são dados.

A extrapolação, utilizada para a construção de limites internos (conectando pontos de serviços positivos) e externos (conectando pontos de valor zero) é feita de modo limitado (quando se tem um serviço negativo e um positivo) ou ilimitado (quando os dados não contemplam serviços negativos).

Discute-se a existência de variantes de interpolação na traçagem dos limites dos depósitos minerais, questão que envolve a determinação da rede otimizada de exploração de um lado e o conhecimento da morfologia de depósito e da homogeneidade ou heterogeneidade na distribuição dos constituintes úteis.

O conhecimento daqueles que se dedicam à delineação dos depósitos minerais, em relação a temas correlatos é muito importante e citamos a amostragem para testes em planta piloto e para testes metalúrgicos; a utilização de um dado método de lavra; o comportamento do aquífero e sua influência na lavra; as questões ligadas à estabilidade das rochas; os impactos ambientais e seu controle; o estudo da geologia das áreas de bota-fora, das barragens, etc.

Ao representar um dado corpo mineral, em seções, por exemplo, é preciso considerar a apresentação de explicações alternativas, isto é, variantes de interpolação, com base no retículo exploratório adotado e no conhecimento de depósitos similares. Não se trata de oferecer explicações para as quais não se têm dados, ou seja, deve ser evitado fazer previsões sobre porções do depósito para os quais não se tem acesso, serviços de pesquisa, amostragem, etc. Contudo, a experiência pode sugerir que certos controle são os condicionantes da mineralização.

A exploração mineral produz dados para uma correta delineação do depósito sob exame e o sucesso, quando obtido, deriva de uma mistura de ciência, técnica, intuição e persistência; inicialmente selecionam-se áreas ou ambientes para pesquisa mineral, seguindo-se a definição de alvos e seu estudo, que pode culminar com a identificação de um ou mais depósitos minerais. Na fase avançada da investigação delinea-se o depósito mineral. Para tal investe-se capital significativo e se o trabalho conduzir à abertura de uma mina, o capital a aplicar pode ser muito elevado.

Até ser completada a fase de delineação e a investigação dos processos de concentração mineral, utiliza-se capital de risco e é desse modo que a indústria mineral mantém-se competitiva.

Belo Horizonte

J. H. Grossi & Jorge M. G. P. Valente

1. Introdução

Inicialmente serão revistos conceitos e definições diversos, de modo a deixar claro para o leitor o significado de várias palavras usualmente utilizadas no cotidiano da pesquisa mineral.

O substantivo **delineação**⁽¹⁾ (sinônimo: **delimitação**) deriva do latim *delineationis* (*delimitacionis*); referido a depósitos minerais significa estabelecer (ou demarcar, ou delimitar, ou traçar) seus limites econômicos (ou industriais). Diz-se, então, **delinear** (em latim *delineare*) ou **delimitar** (em latim, *delimitare*) o depósito. É claro que se estamos a estabelecer limites econômicos, tal ação é feita do modo mais acurado possível; parcelas com a mesma caracterização qualitativo-tecnológica são discriminadas de parcelas estéreis, contidas no interior do depósito e/ou envoltórias do mesmo.

Uma questão de grande importância na delineação é o balizamento dos setores de depósito mineral que têm as mesmas condições hidrogeológicas, de estabilidade e de extratibilidade, ou seja, que têm uma mesma tipologia (em termos geometalúrgicos).

A delineação dos depósitos minerais é a principal tarefa executada pelo especialista **durante** a avaliação geológico-econômica dos mesmos e é efetuada **durante** o decorrer da pesquisa mineral, tornando possível se obter dados para a valorização do corpo (ou do jazimento) mineral. Isso significa que são segregadas partes economicamente lavráveis daquelas estéreis; além disso, detectam-se quais partes devem ser mais acuradamente investigadas.

Sob um ponto de vista geológico, a delineação é supor-

tada pelos dados da exploração mineral. Uma vez terminada a exploração, torna-se possível calcular os recursos minerais (de modo qualitativo e quantitativo) contidos no corpo (ou jazida) sob exame.

Há outros atributos a avaliar; incluem as propriedades tecnológicas dos vários tratos investigados, suas condições de lavra, etc. A partir daí temos condições de determinar o grau de segurança das estimativas realizadas.

Para delinear é preciso investigar o corpo mineral no tocante às características da substância útil e do estéril associado e à ambiência física e econômica. A investigação permite estabelecer a posição do corpo, sua arquitetura, sua trama e seu tamanho (volume, não tonelagem), bem como sua qualidade (teores, por exemplo). A ambiência física é decisiva na avaliação dos corpos minerais, em virtude das questões ligadas ao meio ambiente (poluição do ar e da água, disposição de rejeitos, etc.). É intuitivo concluir que minas subterrâneas originam, na maior parte dos casos, problemas ambientais mais simples que minas a céu aberto.

A delineação dos recursos e das reservas minerais é feita objetivando determinar:

1) Recursos amostrados, computados a partir da amostragem e que correspondem aos recursos *in situ*, sem considerar perdas com a lavra e com a concentração, isto é, não são economicamente condicionados.

2) Reservas lavráveis, menores que os recursos amostrados, isto é, aquelas estabelecidas em função de um dado esquema de lavra e modeladas em função das características geológicas do jazimento e dos condicionantes tecnológicos próprios do processo de extração e do lucro com a operação.

[1] em inglês, *delineation*; em francês, *délimitation*.

Outros fatores modificadores devem ser considerados (p. ex., ambientais).

Uma vez delineado o recurso amostrado, a avaliação econômica do depósito permite definir a reserva lavrável que, em última instância, corresponde a minério (ou ao mineral industrial, ou à rocha industrial) que proporciona lucro ao ser explorado, considerando-se os métodos de lavra e de beneficiamento, a distância de transporte, o custo dos equipamentos de lavra e beneficiamento, os diversos custos operacionais, os impostos, etc.

Princípios da delineação

Antes de examinar os métodos práticos usados na delineação dos depósitos minerais faremos alguns comentários pertinentes sobre o tema. A delineação é baseada em observação e em inferência.

Quando o contato entre o corpo e sua encaixante estéril é diretamente comprovado a partir de exposições naturais ou em trincheiras, em furos de sonda e em galerias, a delineação é simples, unindo-se sucessivamente os locais de "observação" no mapa geológico e nas seções horizontais e verticais. Se esses locais são próximos uns dos outros, a traçagem é contínua e feita com absoluta segurança. Deve ser comentado que o corpo mineralizado assim delineado quase sempre não tem extraído todo o material nele contido, por causa de restrições diversas (fatores condicionantes).

Quando o contato entre a mineralização e o estéril não é diretamente observado, inferências são feitas durante a delineação, usando-se regras adequadas.

Em uma superfície topográfica irregular, um contato estéril-mineralização que tem direção e mergulho variáveis adquire traço muito caprichoso. Examinemos o que acontece quando a atitude do contato é constante.

Imaginemos um contato estéril-mineralização, determinado em uma trincheira, com direção e mergulho

admitidos como constantes. Se esse contato é regular, podemos determinar o arranjo subterrâneo do mesmo, para qualquer nível topográfico desejado. Se o contato é sucessivamente observado em diversas trincheiras, em terreno de topografia irregular, pode-se, por exemplo, traçar a linha que separa o estéril da mineralização. Adicionalmente, quando o corpo de minério conforma uma dobra (anticlinal, por exemplo), é possível traçar o contato em níveis subterrâneos, utilizando os valores do rumo e do caimento do eixo da dobra, notando-se que o contato, irregular no terreno de topografia acidentada, torna-se regular em um dado nível subterrâneo (Figura 1.1). Essa é uma situação típica de uso de dedução.

O problema inverso do acima citado pode também ocorrer. Imaginemos estações de observação do contato estéril-minério em um nível subterrâneo no qual um sistema de galerias foi desenvolvido. É possível projetar na superfície de terreno de topografia irregular o contato observado em sub-superfície. Novamente é uma questão de dedução.

Em muitas situações, na pesquisa mineral, a dedução é o modo pelo qual as questões são resolvidas. Por exemplo, de um dado nível de uma mina é possível, facilmente, projetar para cima ou para baixo, em outros níveis e subníveis, a posição do contato entre minério e encaixante.

Outra situação onde a dedução é usada é quando se tem corpo falhado. É possível, usando-se contornos estruturais, representar o traço (intersecção) da capa e da lapa contra a superfície da falha, também representada por contornos estruturais (Figura 1.2).

O leitor concluirá, então, que a delineação é uma questão simples de dedução (geométrica, trigonométrica, etc.). A realidade é mais complexa que isso. Não devemos esquecer que uma vez delineado o corpo mineral, em termos de estéril e minério (ou mineral, ou rocha industrial), isso não significa que toda a substância útil pode ser lavrada, pois há diversas restrições, especialmente de cunho econômico, relacionadas ao aproveitamento do material.

Em todas as situações onde se aplica dedução na

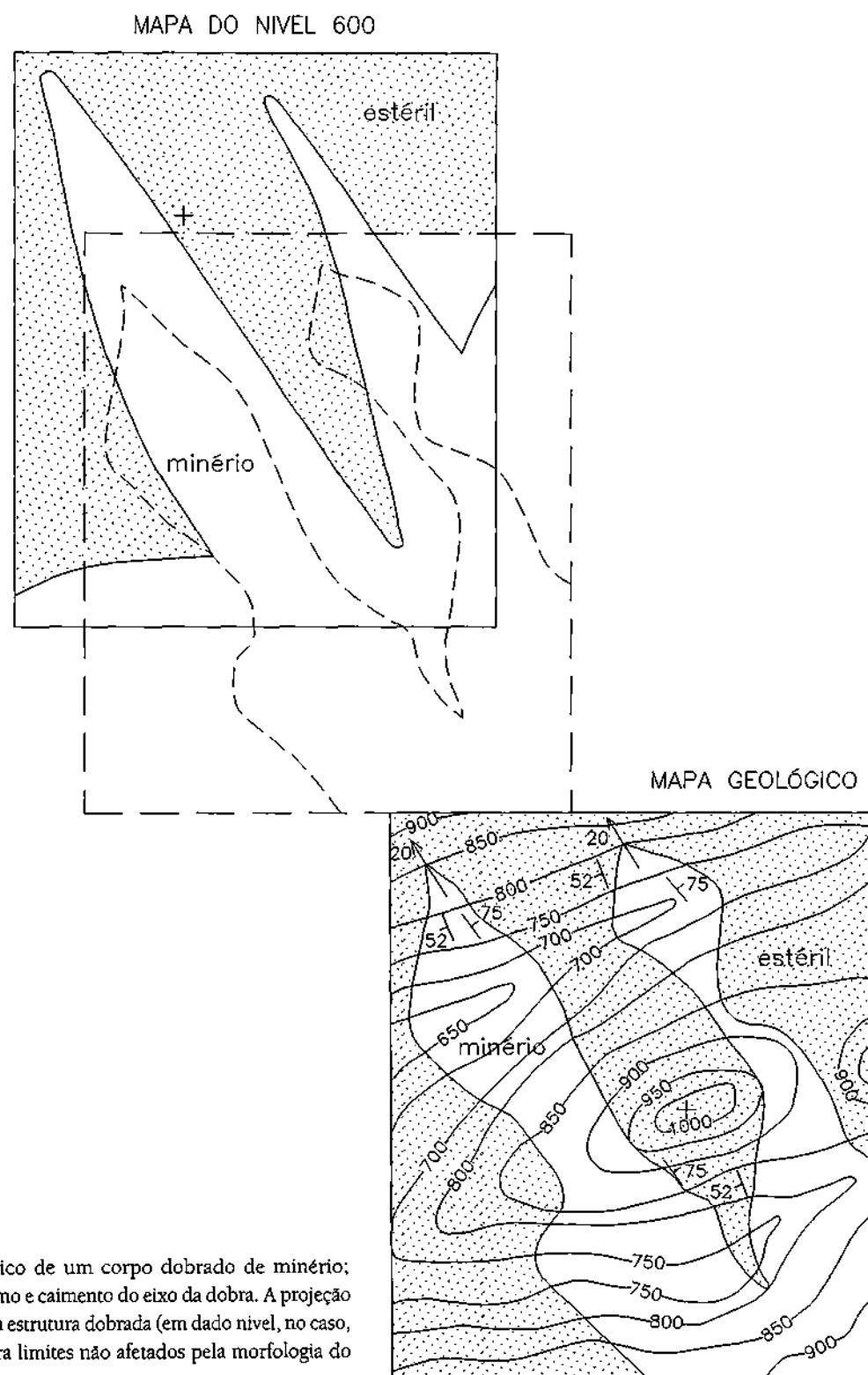


Fig. 1.1 Mapa geológico de um corpo dobrado de minério; assinala-se rumo e caimento do eixo da dobra. A projeção subterrânea da estrutura dobrada (em dado nível, no caso, 600 m) mostra limites não afetados pela morfologia do terreno.

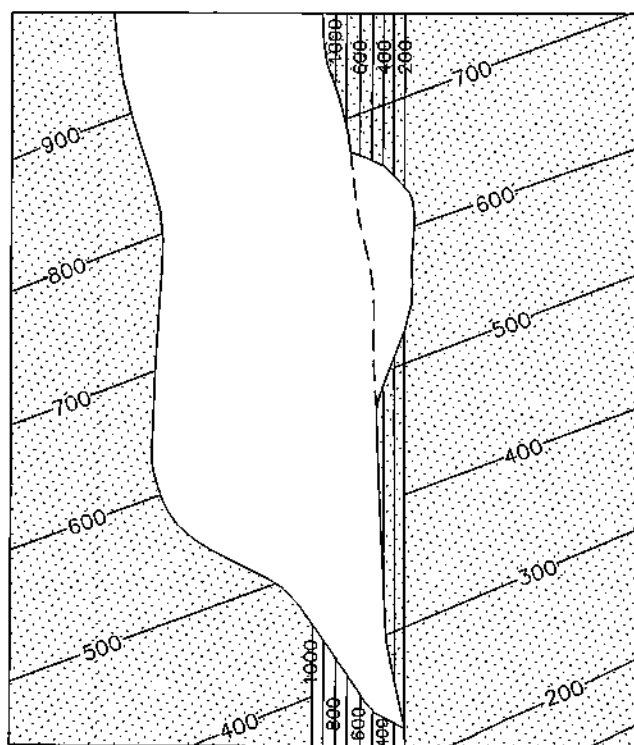
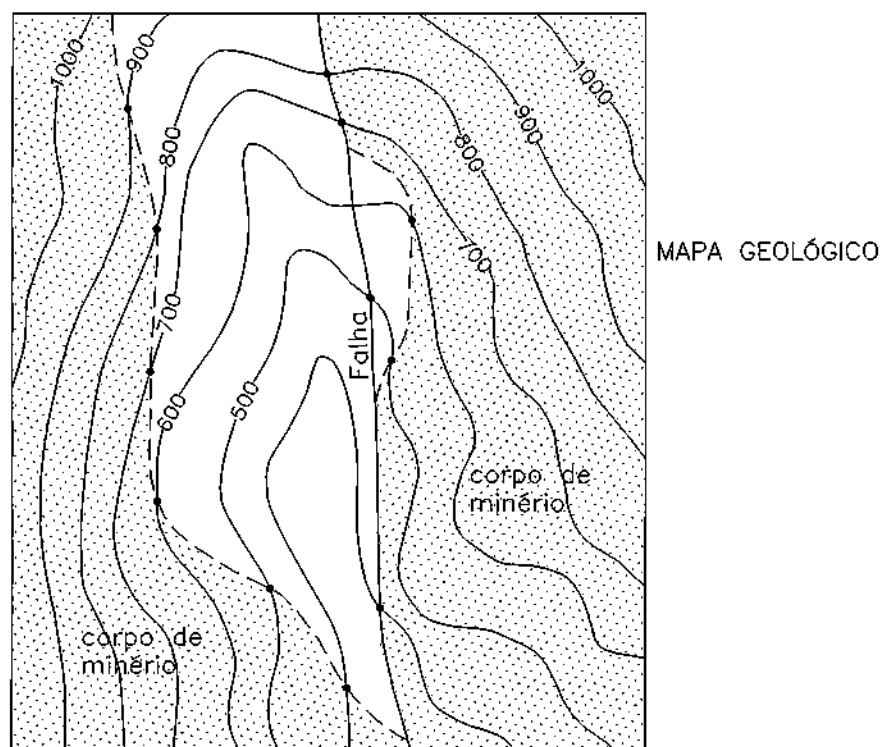


Fig. 1.2 Comportamento subterrâneo da capa de um corpo tabular de minério, falhado.

traçagem, é importante lembrar que as projeções devem ficar restritas à proximidade imediata das estações de observação. O leitor sabe que pequenas variações na direção e no mergulho dos contatos provocam grandes diferenças no comportamento das superfícies que definem os mesmos. Além disso, dobramento superposto, cisalhamento, diferenças reológicas, etc., modificam a atitude dos contatos.

Quando se opera na delineação de corpos minerais irregularmente discordantes, dificilmente os procedimentos da dedução são aplicáveis. A projeção de estações do contato estéril-minério (contatos observados em trincheiras, furos de sonda, galerias, etc.) pode provocar erros significativos na delineação do corpo e, em consequência, na estimativa de recursos.

Um exemplo da situação mencionada ocorre quando se tem massas mineralizadas estiradas em um dado plano, isto é, comportando-se como linhas (ou tubos); delinear tais massas como corpos tabulares é absolutamente errado.

Na delineação dos corpos minerais é necessário distinguir entre limites traçados com segurança ("observados") e aqueles imprecisos ("inferidos").

Os diferentes processos genéticos e os diferentes ambientes geológicos originam grande variedade de depósitos minerais. Independentemente da variedade dos mesmos, sua investigação (exploração) se alicerça "sobre o mesmo conjunto de princípios e tem o mesmo objetivo – revelar reservas industriais dos vários minerais" (Kreiter, 1968, p. 179). Segundo Kreiter, a traçagem e delineação dos depósitos minerais apóia-se em três princípios:

- 1) Acumulação gradual de dados ou princípio da aproximação sucessiva.
- 2) Princípio da previsão e verificação geológicas.
- 3) Exploração integrada (princípio da totalização da investigação).

Ao examinar os princípios que orientam a delineação seguiremos de perto as considerações de Kreiter (*op. cit.*, p. 179-180) sobre o tema.

O primeiro princípio estabelece que a investigação

de um depósito é feita passo a passo, de modo que podem ser descartados aqueles depósitos que são pouco promissores, diminuindo o risco de estudá-los de maneira detalhada e, mesmo, explorá-los. Assim, o conhecimento sobre o depósito é sucessivamente aprimorado com dados adicionados consecutivamente. Cada novo serviço de exploração permite aprimorar a delineação.

No estágio preliminar da exploração, os limites estabelecidos para o depósito permitem uma primeira avaliação e valorização do mesmo. Isso indicará a necessidade ou não de prosseguir com o estágio detalhado de exploração, oportunidade na qual a envoltória industrial será estabelecida, em função de premissas.

O princípio da previsão (prognóstico) e da verificação serve como guia para a investigação da arquitetura do depósito. Cada obra de pesquisa é projetada com base em previsões geológicas que são verificáveis ou não. Por exemplo, quando admitimos que o limite do corpo, em uma dada seção vertical ou horizontal, situa-se a uma certa distância de uma obra de pesquisa, outra obra permitirá demonstrar se a hipótese é correta ou não. Em caso afirmativo, naquela seção sob consideração, podemos delinear o corpo. Em caso negativo, uma revisão das hipóteses admitidas é realizada, novo limite é traçado e isso poderá ser generalizado para seções contíguas.

O princípio da exploração integrada indica-nos que a investigação de um depósito deve ser feita de modo que as obras de pesquisa interceptem o mesmo em todas as suas partes^[2], isto é, permitam estabelecer por completo sua configuração, em termos qualitativos e quantitativos. Por outro lado, esse procedimento gera elementos para avaliar, de modo detalhado, todos os componentes econômicos de interesse, intrínsecos ao depósito. Além disso, integração significa, em nosso caso, avaliação interdisciplinar (geológica, mineira, econômica, etc.). Com base nesse princípio, determinamos em linhas gerais os tópicos a

[2] Isso não significa que os serviços de pesquisa devam ser orientados segundo rumos e inclinações aleatórios.

verificar e o modo de fazê-lo; assim, detectamos o caráter do depósito (se complexo ou simples), seu contorno industrial, sua dimensão ao longo de qualquer direção, a distribuição dos teores, etc. As obras de pesquisa permitem obter os dados desejados, desde que corretamente organizadas e, em consequência, seções convenientemente posicionadas permitem registro e delineação (dos dados).

A avaliação interdisciplinar conduz à integração de todos os dados referentes ao depósito, intrínsecos e extrínsecos. As escavações subterrâneas, por exemplo, são usadas como meio de amostrar, como meio de transporte, ventilação, drenagem, etc. Ao se abrir uma galeria cujo objetivo é tocar o contato estéril-minério, ela será usada, também, para conhecer a estrutura e textura do minério, as condições de estabilidade da encaixante, o custo preciso da abertura, etc.

Furos de sondagem, testemunhados, geram amostras usadas no estabelecimento de teores, determinação de propriedades físicas (grau de moabilidade, densidade, etc.), avaliação de condições geotécnicas (determinação do RQD, testes triaxiais, etc.), e diversas outras linhas de investigação.

Os condicionantes econômicos é que permitem estabelecer se um dado corpo mineral tem ou não minério (ou mineral, ou rocha industrial). Um dos importantes condicionantes é o custo ou o valor da terra. Por exemplo, o custo de várzeas em regiões desenvolvidas é elevado (em geral), enquanto em regiões ínvias, é muito menor. Por isso, a lavra de aluviões na Região Amazônica é economicamente viável. Outra situação envolvendo várzeas é quando se tem depósitos de areia, cascalho e argila, por exemplo, em cidades como São Paulo ou Curitiba; o valor do terreno nesses locais é muitas vezes maior se comparado, por exemplo, com aquele de cidades em Tocantins, onde áreas com depósitos de materiais de construção pouco valem, comparativamente.

Um aspecto econômico de grande importância é a disponibilidade de mão-de-obra especializada nas minas. Em regiões desenvolvidas e com mineração ativa existe tal

disponibilidade. Por outro lado, o transporte é um dado de enorme peso na economia da indústria mineral. Por isso, transportar cassiterita em aviões, entre Rondônia e São Paulo foi econômico no passado, dadas certas circunstâncias. O mesmo não acontece com bauxita, minério de níquel, minerais industriais em geral, etc. Uma exceção são as pedras preciosas.

Deve ficar claro para o leitor que independentemente do método usado para estimar recursos e reservas a partir da delineação, é necessário adotar algumas hipóteses dentre as quais destacamos:

a) Os elementos básicos de um depósito mineral, determinados em uma estação, podem ser estendidos a estações adjacentes, utilizando um princípio de interpretação;

b) As observações são feitas em conformidade com a natureza do depósito mineral;

c) A amostragem representa o depósito, na porção amostrada;

d) O método de exploração é adequado e a rede de escavações e sondagens prova a continuidade do depósito;

e) Qualquer parâmetro (ou propriedade) tem valor constante no segmento do depósito que está sob exame;

f) A forma do depósito, por vezes muito complexa, pode ser transformada em uma forma hipotética, razoavelmente exata e mais simples.

A superfície basal do depósito transformado posiciona-se em uma superfície plana. O depósito é subdividido em segmentos menores, cada um deles caracterizado por um conjunto pequeno de variáveis.

Regras de Interpretação

Examinaremos as hipóteses mencionadas, lembrando que o esquema usado para interpretar as variáveis entre duas estações de observação condiciona a delimitação dos blocos. Além disso, a precisão dos valores das variáveis

depende da interpretação adotada. Os esquemas de interpretação podem ser **analíticos**, **intrínsecos** ou **empíricos** (Grossi Sad, 1975). Quando analíticos incluem a regra das variações graduais lineares e a regra da área de influência, ambas aplicadas aos elementos que caracterizam o depósito mineral. A interpretação intrínseca utiliza critérios geológicos, tecnológicos e econômicos e o esquema empírico apóia-se no critério da generalização.

Regra das Variações Graduais

A regra estabelece que os elementos do depósito expressáveis numericamente variam de modo gradual e contínuo, ao longo de uma linha reta que liga duas estações adjacentes X e Y, onde foram medidas as espessuras x e y. A posição de um ponto Z sobre a linha XY, com uma dada espessura z pode ser determinada para uma dada posição Z.

Para localizar o ponto Z: os triângulos $X_1Z_2Z_1$ e $X_1Y_2Y_1$, são similares, de modo que:

$$\frac{X_1Z_2}{X_1Y_2} = \frac{Z_1Z_2}{Y_1Y_2} = \frac{z-x}{y-x}$$

$$X_1Z_2 = XZ \text{ e } X_1Y_2 = XY$$

$$XZ = \frac{z-x}{y-x} = xy$$

e para determinar z:

$$\frac{Z_1Z_2}{Y_1Y_2} = \frac{X_1Z_2}{X_1Y_2} = \frac{z-x}{y-x} \quad \text{ou} \quad \frac{z-x}{y-x} = \frac{XZ}{XY}$$

$$z-x = \frac{XZ}{XY}(y-x) \quad z = \frac{XZ}{XY}(y-x) + x$$

A regra pode ser aplicada no prosseguimento de uma linha externa às estações conhecidas, ou seja, interpolação e extrapolação podem ser praticadas.

Regra da Área de Influência

Segundo a regra o valor de qualquer ponto entre duas estações é constante e igual ao valor da estação mais próxima. Por exemplo, em duas estações mediram-se as espessuras e_1 e e_2 ; o valor medido em cada estação é estendido até o ponto médio entre as estações (E_m). Na prática o ponto médio é encontrado na interseção de dois arcos de círculo, cujo raio é um tanto maior que a média da distância entre as estações. Qualquer ponto na linha E_1 e E_2 , exceto E_m , está na influência linear da estação E_1 , ou da estação E_2 , e mais próximo da mesma que o ponto adjacente.

A regra é usada para a construção de iguais áreas de influência para áreas e volumes, em diversas situações (ver Figura 1.4).

1) Duas escavações interceptantes. Uma galeria cabeceira e uma subida, por exemplo, interceptam-se em um plano. As áreas de igual influência de cada escavação (em minério, em estéril) são encontradas pelo bissetor entre as mesmas. Qualquer ponto do bissetor é equidistante de ambas as escavações e qualquer ponto em cada área de influência está mais próximo da escavação adjacente que da outra.

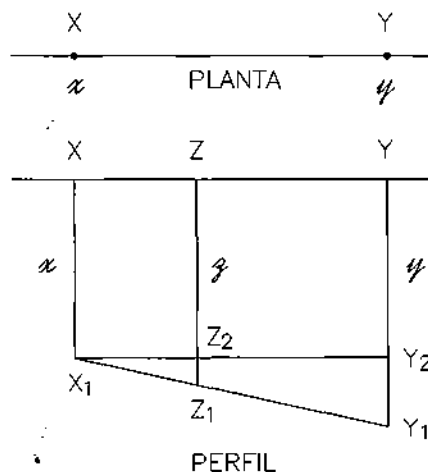


Fig. 1.3 Determinação dos atributos de um ponto entre dois pontos dados.

2) Duas escavações paralelas. Uma linha eqüidistante das duas escavações (trincheiras, galerias cabeceiras, travessas, subidas, furos de sonda) dividirá a área entre as duas áreas de influência.

3) Escavações em quatro lados. Um bloco com escavações em quatro lados, tem quatro áreas de influência, com uma combinação de ângulos bissetores e linhas paralelas.

4) Triângulo eqüilátero. As áreas de influência de cada vértice são determinadas construindo-se bissetores normais a cada lado, no ponto médio.

5) Triângulo obtuso. O ângulo bisetor divide a figura em três áreas iguais em tamanho, porém de forma diferente. O ponto de interseção dos ângulos bissetores está muito mais próximo do vértice do ângulo obtuso que

de outros vértices. Por isso o ponto de interseção e outros pontos do triângulo não satisfazem a regra.

Quando se constroem as áreas de influência pelos bissetores perpendiculares aos lados, as mesmas são de tamanho diferente, mas satisfazem a regra.

As duas situações de construção das áreas de influência (pelos vértices ou pelo ponto médio dos lados) são usadas, mas no caso do ângulo bisetor o arranjo é aplicável a trabalhos representados, em planos e sessões, como linhas. Se os serviços são representados como pontos em mapa as áreas de influência de cada ponto são determinadas pela perpendicular partindo do ponto médio do lado considerado. Para figuras geométricas de quatro lados a construção do ângulo bisetor produz resultados diferentes, em função do modo de construção dos triângulos.

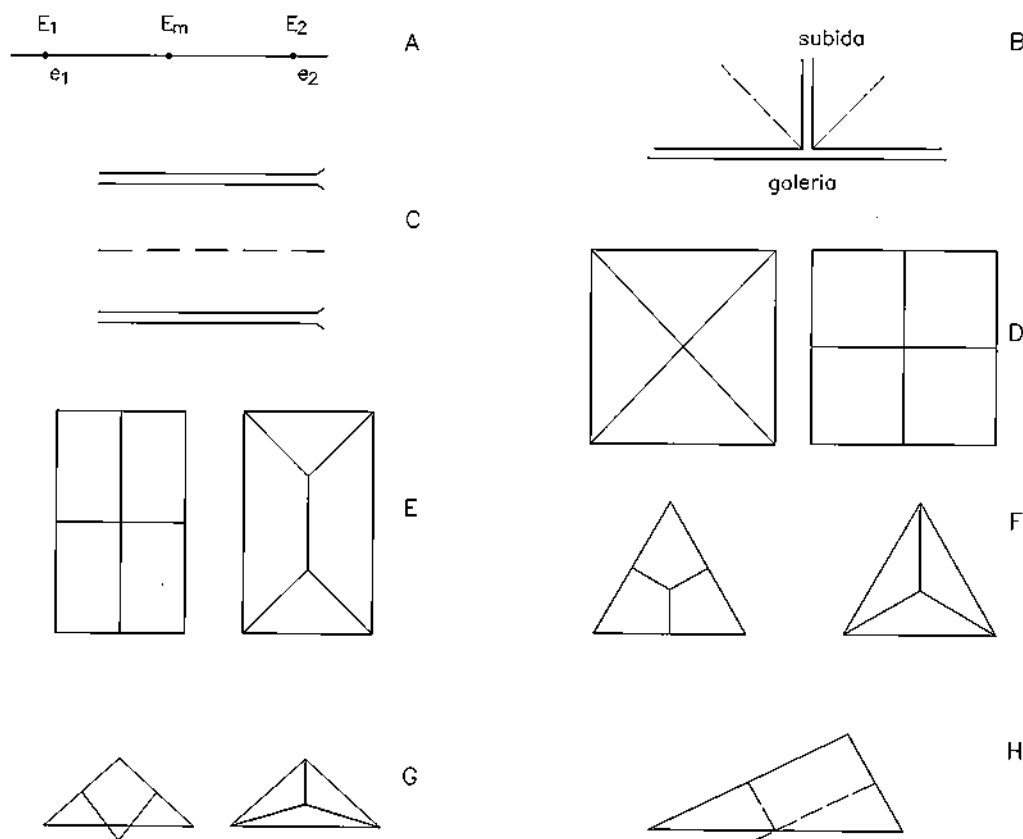


Fig. 1.4 Áreas de influência demarcadas por ângulos bissetores e por normais aos lados.

Arquitetura do corpo mineral e delineação	128
Depósitos entratiformes	128
Depósitos alongados	129
Depósitos equidimensionais	129
Depósitos inconstantes	129
Diluição	130
5. Métodos de delineação	133
Traçagem contínua	133
Interpolação	134
Interpolação e contornos	135
Técnicas de construção dos contornos	138
Simulação condicional	156
Validação cruzada	166
Ponderação e interpolação	167
Extrapolação	170
Extrapolação limitada	172
Extrapolação ilimitada	172
6. Verificação da otimalidade do retículo exploratório	177
Elementos de otimização	177
Analogia	180
Métodos estatísticos	180
Métodos geoestatísticos	181
Adensamento	190
7. Descontinuidade e heterogeneidade dos depósitos minerais	195
8. Erros e sua determinação	201
Erros de interpretação	201
Erros técnicos	201
Erros casuais (aleatórios)	202
Erros sistemáticos	207
9. Uso da parametrização na delineação	213
Introdução a parametrização	213
Teor de corte	214
Seleção de reservas	216
Alternativas para otimização	220

A decisão de parar a pesquisa geológica	226
A parametrização de uma jazida	230
Característica ótima de uma jazida	230
A prática das rejeições	232
10. Uso da tipologia na delimitação	239
Tipologia e análise grupal	239
Generalidades	239
Metodologia	239
Dissimilaridade	240
Dendograma	240
Nota sobre a escolha das variáveis	241
Tipologia e análise vário-grupal	242
Introdução	242
Conceitos básicos prévios	242
O variograma corrente	243
Ilustração da técnica	243
Curvas características	245
Interpretação geo-estrutural por análise vário-grupal	246
Análise vário-grupal como instrumento de decisão em campanha de sondagens	261
Experiência brasileira em análise grupal	270
Notas finais	270
Bibliografia	271

Apresentação

No presente trabalho os autores prepararam texto que apresenta temas relacionados aos princípios, fatores e métodos relacionados à delineação dos depósitos minerais, assuntos abordados por diversos autores; contudo, essas abordagens não tratam de modo sistemático e abrangente as questões de delineação.

A correta delineação de um depósito mineral tem como base a determinação do comportamento espacial do mesmo, em termos de forma, tamanho e atitude, de tal modo que a interrelação e a configuração entre esses parâmetros e o retículo de exploração são precisamente estabelecidas.

O trabalho destina-se aos estudantes de graduação e pós-graduação dedicados à exploração mineral e, também, aos geólogos, engenheiros geólogos e engenheiros de minas, como texto de consulta.

A utilização de métodos matemáticos foi a que julgamos necessária e ao alcance dos estudantes e profissionais.

Sempre que elucidativo, apresentam-se exemplos de cálculos, por diferentes métodos, de tal modo que o leitor pode avaliar as vantagens e desvantagens dos mesmos e a mais adequada a aplicação de um dado método, em relação a outro. É claro que a falta de conhecimento e de experiência pode transformar o procedimento de delineação em mero exercício de geometria, o procedimento depende da familiaridade que o geólogo tem com o tipo de depósito sob investigação.

Quando se utilizam métodos computadorizados para

proceder à delineação, o executor do trabalho deve ter em mente a necessidade de entender o que se está a fazer, ou seja, não é o apertar de teclas que produz resultados corretos.

A determinação de intersecções potencialmente econômicas, à medida que são geradas durante a exploração mineral faz com que se possa avaliar continuamente a investigação em curso.

A delineação de um depósito mineral tem como escopo o estabelecimento dos limites econômicos do mesmo, isto é, segregam-se tratos economicamente aproveitáveis daquelas estéréis. A exploração fornece dados para se determinar a posição do depósito, sua arquitetura, sua estrutura, seu tamanho, a qualidade e quantidade de porções potencialmente mineralizadas, que serão consideradas como minério ou estéril, a partir de condicionantes econômicas.

A delineação é baseada em observação e em inferência; neste último caso aplicam-se procedimentos de dedução. É suportada a delineação por três princípios: acumulação gradual de dados (ou aproximação sucessiva), previsão-verificação geológicas e exploração integrada (ou totalização da informação).

Os seguintes fatores são discutidos no condicionamento da delineação: largura mínima de lavra, teor de corte, recuperação, teor de corte em minérios complexos, teor mínimo de lavra, estéril, acumulação metálica, relação estéril-minério, arquitetura do corpo e diluição.

No trabalho mostra-se a importância que o conhe-

cimento geológico têm na delineação dos depósitos minerais, que envolve conhecimento da paragénes mineral, da granulometria, do grau de liberação, dos teores, do grau de heterogeneidade na distribuição dos elementos, da arquitetura e trama, da dimensão, da topografia, da hidrogeologia e da estabilidade de solos e rochas, etc.

Os fatores econômicos envolvem custos para produzir o minério, valor de venda e mercado, disponibilidade de mão-de-obra, concentração e metalurgia, recuperação, política fiscal, estabilidade econômica, custos de barragens, de tratamento de água e de recuperação ambiental, além do custo do capital.

São apresentados os três métodos utilizados para delineação, a partir dos fatores empregados para a mesma: traçagem contínua, interpolação dos limites e extrapolação limitada ou ilimitada.

A traçagem contínua dos limites de um depósito mineral, aflorante ou não aflorante, é relativamente simples quando o contato estéril-minério é brusco e observado a olho desarmado. Por outro lado, serviços exploratórios podem detectar tal contato. Quando ocorre transição entre minério e estéril, o limite se baseia em amostragem contínua, usando-se, por exemplo, um teor de corte como fator.

A interpolação é um método empregado com base em seções horizontais e verticais. A construção dos pontos chave é feita usando a regra da igual área de influência (o limite é o ponto médio entre dois serviços positivos) ou a regra da variação gradual, quando se admite que a

propriedade varia de modo contínua e linear. A interpolação pode ser praticada com ajuda da construção de contornos (ou isolinhas), que é um meio universal de representar o modo de variação da propriedade sob exame. Os pontos de controle ou de observação das propriedades podem se distribuir de modo irregular ou de modo regular (segundo retículo). A interpolação pode ser feita diretamente, quando a distribuição é irregular ou, quando necessário ou conveniente, se pode construir um arranjo regular.

A observação dos intervalos interpolados, que permitem a construção dos contornos é feita manualmente ou mecanicamente; técnicas mais elaboradas de obtenção dos intervalos envolve inverso da distância, inverso do quadrado da distância, análise de tendência, média móvel e krigagem. Exemplos comparativos de construção de mapas (ou de seções) usando técnicas diferentes são dados.

A extrapolação, utilizada para a construção de limites internos (conectando pontos de serviços positivos) e externos (conectando pontos de valor zero) é feita de modo limitado (quando se tem um serviço negativo e um positivo) ou ilimitado (quando os dados não contemplam serviços negativos).

Discute-se a existência de variantes de interpolação na traçagem dos limites dos depósitos minerais, questão que envolve a determinação da rede otimizada de exploração de um lado e o conhecimento da morfologia de depósito e da homogeneidade ou heterogeneidade na distribuição dos constituintes úteis.

O conhecimento daqueles que se dedicam à delineação dos depósitos minerais, em relação a temas correlatos é muito importante e citamos a amostragem para testes em planta piloto e para testes metalúrgicos; a utilização de um dado método de lavra; o comportamento do aquífero e sua influência na lavra; as questões ligadas à estabilidade das rochas; os impactos ambientais e seu controle; o estudo da geologia das áreas de bota-fora, das barragens, etc.

Ao representar um dado corpo mineral, em seções, por exemplo, é preciso considerar a apresentação de explicações alternativas, isto é, variantes de interpolação, com base no retículo exploratório adotado e no conhecimento de depósitos similares. Não se trata de oferecer explicações para as quais não se têm dados, ou seja, deve ser evitado fazer previsões sobre porções do depósito para os quais não se tem acesso, serviços de pesquisa, amostragem, etc. Contudo, a experiência pode sugerir que certos controle são os condicionantes da mineralização.

A exploração mineral produz dados para uma correta delineação do depósito sob exame e o sucesso, quando obtido, deriva de uma mistura de ciência, técnica, intuição e persistência; inicialmente selecionam-se áreas ou ambientes para pesquisa mineral, seguindo-se a definição de alvos e seu estudo, que pode culminar com a identificação de um ou mais depósitos minerais. Na fase avançada da investigação delinea-se o depósito mineral. Para tal investe-se capital significativo e se o trabalho conduzir à abertura de uma mina, o capital a aplicar pode ser muito elevado.

Até ser completada a fase de delineação e a investigação dos processos de concentração mineral, utiliza-se capital de risco e é desse modo que a indústria mineral mantém-se competitiva.

Belo Horizonte

J. H. Grossi & Jorge M. G. P. Valente

1. Introdução

Inicialmente serão revistos conceitos e definições diversos, de modo a deixar claro para o leitor o significado de várias palavras usualmente utilizadas no cotidiano da pesquisa mineral.

O substantivo **delineação**⁽¹⁾ (sinônimo: **delimitação**) deriva do latim *delineationis* (*delimitacionis*); referido a depósitos minerais significa estabelecer (ou demarcar, ou delimitar, ou traçar) seus limites econômicos (ou industriais). Diz-se, então, **delinear** (em latim *delineare*) ou **delimitar** (em latim, *delimitare*) o depósito. É claro que se estamos a estabelecer limites econômicos, tal ação é feita do modo mais acurado possível; parcelas com a mesma caracterização qualitativo-tecnológica são discriminadas de parcelas estéreis, contidas no interior do depósito e/ou envoltórias do mesmo.

Uma questão de grande importância na delineação é o balizamento dos setores de depósito mineral que têm as mesmas condições hidrogeológicas, de estabilidade e de extratibilidade, ou seja, que têm uma mesma tipologia (em termos geometalúrgicos).

A delineação dos depósitos minerais é a principal tarefa executada pelo especialista **durante** a avaliação geológico-econômica dos mesmos e é efetuada durante o decorrer da pesquisa mineral, tornando possível se obter dados para a valorização do corpo (ou do jazimento) mineral. Isso significa que são segregadas partes economicamente lavráveis daquelas estéreis; além disso, detectam-se quais partes devem ser mais acuradamente investigadas.

Sob um ponto de vista geológico, a delineação é supor-

tada pelos dados da exploração mineral. Uma vez terminada a exploração, torna-se possível calcular os recursos minerais (de modo qualitativo e quantitativo) contidos no corpo (ou jazida) sob exame.

Há outros atributos a avaliar; incluem as propriedades tecnológicas dos vários tratos investigados, suas condições de lavra, etc. A partir daí temos condições de determinar o grau de segurança das estimativas realizadas.

Para delinear é preciso investigar o corpo mineral no tocante às características da substância útil e do estéril associado e à ambiência física e econômica. A investigação permite estabelecer a posição do corpo, sua arquitetura, sua trama e seu tamanho (volume, não tonelagem), bem como sua qualidade (teores, por exemplo). A ambiência física é decisiva na avaliação dos corpos minerais, em virtude das questões ligadas ao meio ambiente (poluição do ar e da água, disposição de rejeitos, etc.). É intuitivo concluir que minas subterrâneas originam, na maior parte dos casos, problemas ambientais mais simples que minas a céu aberto.

A delineação dos recursos e das reservas minerais é feita objetivando determinar:

1) Recursos amostrados, computados a partir da amostragem e que correspondem aos recursos *in situ*, sem considerar perdas com a lavra e com a concentração, isto é, não são economicamente condicionados.

2) Reservas lavráveis, menores que os recursos amostrados, isto é, aquelas estabelecidas em função de um dado esquema de lavra e modeladas em função das características geológicas do jazimento e dos condicionantes tecnológicos próprios do processo de extração e do lucro com a operação.

[1] em inglês, *delineation*; em francês, *délimitation*.

Outros fatores modificadores devem ser considerados (p. ex., ambientais).

Uma vez delineado o recurso amostrado, a avaliação econômica do depósito permite definir a reserva lavrável que, em última instância, corresponde a minério (ou ao mineral industrial, ou à rocha industrial) que proporciona lucro ao ser explorado, considerando-se os métodos de lavra e de beneficiamento, a distância de transporte, o custo dos equipamentos de lavra e beneficiamento, os diversos custos operacionais, os impostos, etc.

Princípios da delineação

Antes de examinar os métodos práticos usados na delineação dos depósitos minerais faremos alguns comentários pertinentes sobre o tema. A delineação é baseada em observação e em inferência.

Quando o contato entre o corpo e sua encaixante estéril é diretamente comprovado a partir de exposições naturais ou em trincheiras, em furos de sonda e em galerias, a delineação é simples, unindo-se sucessivamente os locais de “observação” no mapa geológico e nas seções horizontais e verticais. Se esses locais são próximos uns dos outros, a traçagem é contínua e feita com absoluta segurança. Deve ser comentado que o corpo mineralizado assim delineado quase sempre não tem extraído todo o material nele contido, por causa de restrições diversas (fatores condicionantes).

Quando o contato entre a mineralização e o estéril não é diretamente observado, inferências são feitas durante a delineação, usando-se regras adequadas.

Em uma superfície topográfica irregular, um contato estéril-mineralização que tem direção e mergulho variáveis adquire traço muito caprichoso. Examinemos o que acontece quando a atitude do contato é constante.

Imaginemos um contato estéril-mineralização, determinado em uma trincheira, com direção e mergulho

admitidos como constantes. Se esse contato é regular, podemos determinar o arranjo subterrâneo do mesmo, para qualquer nível topográfico desejado. Se o contato é sucessivamente observado em diversas trincheiras, em terreno de topografia irregular, pode-se, por exemplo, traçar a linha que separa o estéril da mineralização. Adicionalmente, quando o corpo de minério conforma uma dobra (anticlinal, por exemplo), é possível traçar o contato em níveis subterrâneos, utilizando os valores do rumo e do caimento do eixo da dobra, notando-se que o contato, irregular no terreno de topografia acidentada, torna-se regular em um dado nível subterrâneo (Figura 1.1). Essa é uma situação típica de uso de dedução.

O problema inverso do acima citado pode também ocorrer. Imaginemos estações de observação do contato estéril-minério em um nível subterrâneo no qual um sistema de galerias foi desenvolvido. É possível projetar na superfície de terreno de topografia irregular o contato observado em sub-superfície. Novamente é uma questão de dedução.

Em muitas situações, na pesquisa mineral, a dedução é o modo pelo qual as questões são resolvidas. Por exemplo, de um dado nível de uma mina é possível, facilmente, projetar para cima ou para baixo, em outros níveis e subníveis, a posição do contato entre minério e encaixante.

Outra situação onde a dedução é usada é quando se tem corpo falhado. É possível, usando-se contornos estruturais, representar o traço (intersecção) da capa e da lapa contra a superfície da falha, também representada por contornos estruturais (Figura 1.2).

O leitor concluirá, então, que a delineação é uma questão simples de dedução (geométrica, trigonométrica, etc.). A realidade é mais complexa que isso. Não devemos esquecer que uma vez delineado o corpo mineral, em termos de estéril e minério (ou mineral, ou rocha industrial), isso não significa que toda a substância útil pode ser lavrada, pois há diversas restrições, especialmente de cunho econômico, relacionadas ao aproveitamento do material.

Em todas as situações onde se aplica dedução na

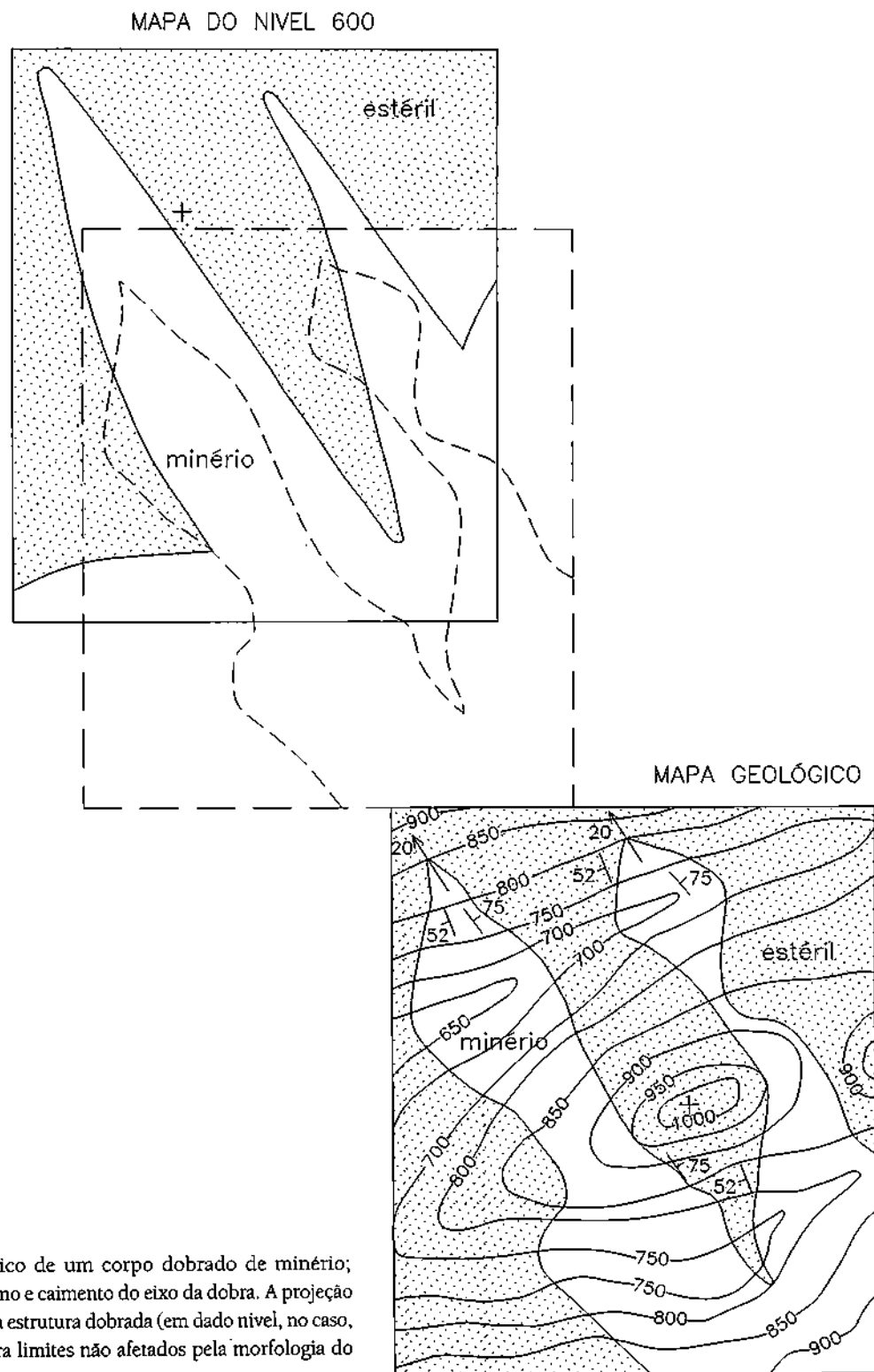


Fig. 1.1 Mapa geológico de um corpo dobrado de minério; assinala-se rumo e caimento do eixo da dobra. A projeção subterrânea da estrutura dobrada (em dado nível, no caso, 600 m) mostra limites não afetados pela morfologia do terreno.

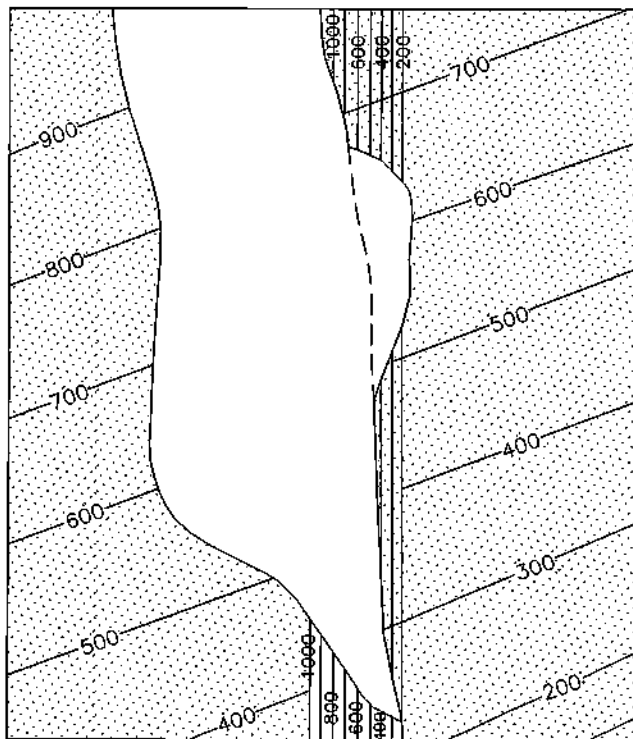
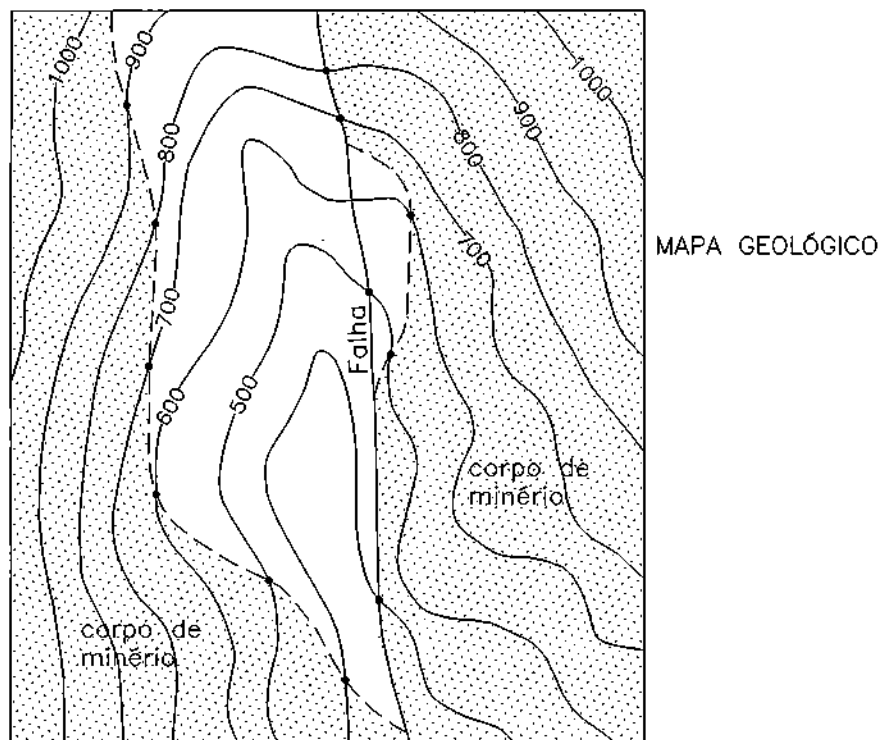


Fig. 1.2 Comportamento subterrâneo da capa de um corpo tabular de minério, falhado.

Inferência

Quando se interpreta o comportamento das variáveis entre duas estações de medição, adjacentes, a delimitação de segmentos ou de blocos de um depósito pode ser baseada em considerações geológicas, tecnológicas ou econômicas.

A inferência geológica inclui limites geológicos naturais estruturais (falhamentos e dobramentos), variações no caráter da mineralização, adelgaçamentos ou espessamentos, meteorização, variação das propriedades físicas, composição heterogênea, alteração mineral, presença de impurezas, etc., em relação às obras de pesquisa. Nas figuras 1.5 e 1.6 são apresentados exemplos.

Aspectos tecnológicos, fisiográficos e econômicos que são considerados na inferência incluem a topografia, espessura do estéril, relação estéril/minério, nível de água, método de lavra, método de concentração, custo de extração, propriedade do terreno, etc. A seleção e delimitação dos blocos mineralizados inclui um ou mais aspectos listados.

MAPA GEOLÓGICO

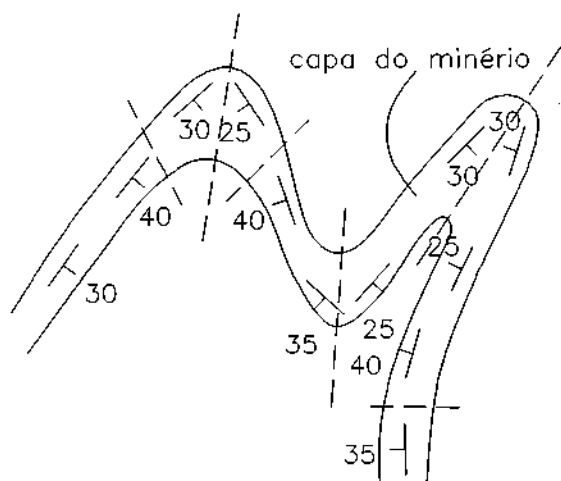


Fig. 1.5 Construção de blocos geológicos com base na separação de domínios homogêneos.

Procedimento Empírico

Procedimento empírico (ou Regra da Generalização) é usado na interpretação de dados exploratórios. Na falta de outro critério é usado com base em experiência limitada.

O uso de um fator densidade, definido para depósitos similares, é o caso mais comum. Utilizar um certo valor para as reservas, com base em dados de produção, é preferível em vez de usar dados com base em furos amplamente espaçados e com valores irregulares. Na estimativa de reservas de depósitos de mica de um distrito pegmatítico pode ser adequado adotar dados de produção de alguns pegmatitos, para quantificar recursos de outros corpos. A projeção da continuidade de um depósito, fora dos serviços, ao longo da direção ou do mergulho também é praticada com base na regra.

Um exemplo da aplicação da regra é o seguinte: para extrapolar os limites dos depósitos de um dado metal, entre furos de sondagem, alguns dos quais atravessam minério, considera-se que o terreno pode estar fortemente mineralizado, fracamente mineralizado ou não mineralizado.

MAPA GEOLÓGICO

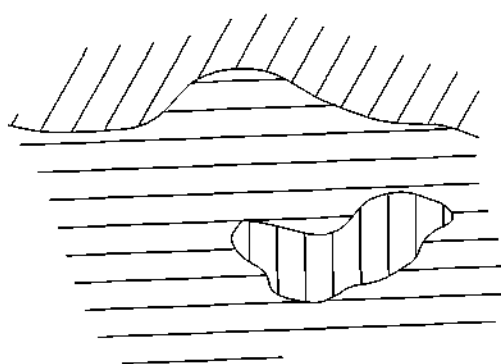


Fig. 1.6 Divisão de corpo de minério em função dos tipos físicos: traços verticais, minério duro, traços horizontais, minério intermediário e traços inclinados, minério brando.

O limite do corte entre dois furos é selecionado como $3/4$ ou $2/3$ da distância do minério em relação a um furo fortemente mineralizado, $1/2$ da distância para um furo fracamente mineralizado e $1/3$ da distância para furo estéril.

A Regra da Generalização é usada para avaliar áreas arbitrariamente reduzidas, para valores de espessura e teores médios, corrigindo-se, então, recursos ou reservas estimadas por fatores de correção subjetivos.

A redução de reservas após quantificação, segundo certos percentuais, é uma prática comum e típica do procedimento empírico.

Nota sobre variabilidade

As regras expostas até o momento, envolvendo condicionamentos geológicos, apontam para diferentes esquemas de delineação e, conseqüentemente, para diferentes métodos de estimativa de reservas. Contudo, é importante deixar claro que os dados disponíveis nem sempre permitem aplicar regras e inferências com limites precisos. Quando a variabilidade das propriedades do depósito for elevada, pode ocorrer dificuldade na apreciação do significado das relações entre os dados.

Para uma correta avaliação da questão acima apresentada podem ser aplicados os procedimentos da matemática estatística e/ou geoestatística.

Os procedimentos estatísticos (bernoullianos) e geoestatísticos (matheronianos) têm sido empregados na avaliação de dados de exploração mineral e nos estudos relacionados à abertura de novas minas ou na reavaliação de minas em operação. Em ambas as situações os dados numéricos produzem estimativas confiáveis, observando-se que o procedimento geoestatístico denominado **krigagem** é o único interpolador exato e ótimo (com variância mínima), e não enviesado (permanência da média).

Os esquemas de tratamento matemático são muito

úteis na separação da variabilidade ao acaso da variabilidade real. Em uma dada área a distribuição dos valores dos parâmetros pode se fazer ao acaso, mas com a ampliação do tamanho da área, as variações podem ser reais. Assim, a variação de valores em um depósito pode ser decorrente da superposição de variações reais ou associadas à tendências ou pode ser decorrente de aleatoriedade (valores distribuídos ao acaso).

A hipótese de distribuição ao acaso das variáveis de um depósito mineral contraria as hipóteses de gênese dos próprios depósitos. Isso significa que os depósitos minerais são considerados como originados por processos diversos que ocorreram em parcelas específicas da crosta terrestre e são estreitamente ligados à história geológica dessas parcelas. Assim, os diversos aspectos da geologia, sejam dinâmicos, históricos, geomorfológicos, estruturais, petrográficos e geoquímicos revelam as relações que governam a distribuição dos minerais nas rochas e depósitos minerais. Os processos naturais são interdependentes, mas sua importância em condições diferentes não é a mesma.

Pesquisa, jazida e corpo minerais

Substâncias minerais usadas industrialmente são chamadas **matérias primas minerais**. Em função da sua utilização e do seu conteúdo, são classificadas como sólidas, líquidas ou gasosas. As substâncias minerais sólidas, por sua vez, são denominadas metálicas e não metálicas (minerais e rochas industriais, e minerais e rochas combustíveis).

Um **mineral** é uma substância natural, inorgânica, de composição química definida (mas variável dentro de certos limites), propriedades físicas características e tendo estrutura atômica ordenada (sob condições favoráveis de formação). Uma espécie mineral é denominada **mineral econômico** quando é usada industrialmente. Chama-se **mineral minério** a substância da qual se retira um metal, de modo econômico. Usada isoladamente, a palavra minério

significa substância da qual se pode produzir um ou mais metais, economicamente.

Rocha é um agregado de minerais; uma massa individualizada de rocha é um **corpo geológico**. O conceito de corpo em geologia refere-se a qualquer volume de rocha selecionado para estudo, sem restrição de tamanho. Se falamos **corpo mineral**, a expressão tem conotação morfológica, isto é, tratamos de formas ou arquiteturas rochosas de interesse econômico. Por exemplo, uma camada de itabirito, ou de dolomito, um filão de quartzo, etc.

Corpos minerais são acumulações de matéria mineral natural, limitadas por todos os lados e confinadas a um elemento (ou elementos) estrutural. Os limites dos corpos minerais podem ser naturais, tecnológicos ou econômicos.

Depósito mineral é uma concentração (acumulação) natural de qualquer substância útil, de natureza rochosa; apresenta variabilidade homogênea ou heterogênea. Para uma dada escala o depósito será considerado homogêneo (estatisticamente) quando a média da configuração de qualquer componente for a mesma para todos os outros componentes de igual tamanho, tomadas (amostrados) do corpo. A escala com a qual se descreve um depósito como homogêneo é chamada **domínio**. O conceito de homogeneidade aplica-se aos corpos geológicos (em geral) e corpos minerais (em particular).

Corpos ou depósitos minerais economicamente utilizáveis são chamados **jazidas**. Uma **jazida** (mineral) é, portanto, uma concentração local de substância mineral na crosta da terra, em tais quantidade e qualidade que pode ser usada industrialmente, ou seja, de modo racional e econômico. Diz-se jazida de ouro, de calcário, de manganês, etc. Qualidade e quantidade dependem das propriedades tecnológicas, do condicionamento geológico e mineiro, da situação econômica, da localização, do transporte, do beneficiamento, etc.

Assim, jazidas possuem um conjunto de atributos intrínsecos e extrínsecos que satisfazem as exigências de

produção, visando uso industrial, condicionado este (se for o caso), pela tecnologia de transformação.

As jazidas contêm um ou mais componentes úteis; incluem jazidas de minerais metálicos e jazidas de minerais não metálicos (chamados minerais industriais e rochas industriais). As jazidas de minerais não metálicos são as mais importantes, bastando considerar os combustíveis fósseis, os materiais de construção, os adubos diversos, os materiais cerâmicos, os diamantes, as gemas em geral, etc.

Há certas rochas que são utilizadas como tal, não se retirando das mesmas um dado mineral; fala-se, nesse caso, de jazidas de granitos, de mármore, de quartzito, de ardósia, de pedra sabão, etc.

As mineralizações chamadas **minérios**, presentes nas jazidas metálicas, contêm minerais intercalados com outros minerais sem qualquer valor que são chamados minerais de **ganga**. Minério é, então, constituído por um (ou mais) mineral minério e ganga. O conceito é puramente econômico (condicionado, contudo, à evolução tecnológica, ao preço de venda, à localização, à condição ambiental), na atual conjuntura, ou seja, no momento da avaliação.

O conceito de minério, no imaginário daqueles dedicados à geologia econômica, à pesquisa mineral e à lavra de minas é, então, restritivo. Por isso devemos evitar – e mesmo repudiar – as generalizações, tão comuns hoje em dia, especialmente em meios não afetos aos temas mencionados. É usual, nesses meios, dizer-se minério ao se referir a ardósia, granito, sal gema, mármore, etc. Ora, se falamos que ardósia é minério, é minério de que? De sílica, de cal, de potassa? Ou de quartzo, ou de sericita? Na realidade é minério de coisa alguma. O diamante é um exemplo ímpar, se chamado de minério. Alguém pensaria dele extrair carbono? O bom senso aponta para o uso do termo minério da maneira tradicional e clássica.

Minérios podem ser classificados como ricos, correntes (intermediários) e pobres. Minérios ricos podem ser usados, em certos casos, diretamente, sem necessidade de beneficiamento – concentração. É o que acontece com

parte dos minérios hematíticos do Quadrilátero Ferrífero e de Carajás, com mais de 66% Fe. Já os itabiritos brandos dessas províncias são minérios pobres (com menos de 66% Fe, em geral com 46 - 52% Fe).

Os conceitos rico, corrente e pobre podem ser estendidos em casos específicos para as jazidas de minerais e rochas industriais. Assim, as jazidas de fosfato da Região do Triângulo Mineiro (Tapira, Barreiro do Araxá, Salitre) não são ricas (têm menos de 20 % P_2O_5), mas correntes (teor médio próximo de 12 % P_2O_5) ou pobres (com teor médio de cerca de 7 - 8 % P_2O_5).

Os conceitos e definições apresentados não podem ser considerados precisos, na verdadeira acepção da palavra; é difícil falar em precisão quando não há concordância geral ou unificação no uso. Empregaremos os conceitos e definições acima mencionados visando um certo consenso nas idéias que serão discutidas no texto ora oferecido.

A questão da precisão terminológica torna-se aguda quando tratamos da atividade de pesquisa mineral. Maia (1974) discute conceitos e imprecisões técnicas quando define as **fases da mineração**:

“O objetivo da mineração é a descoberta de jazidas, estudo e avaliação dos corpos potencialmente aproveitáveis e a econômica utilização daqueles que se revelaram jazidas. Essas operações envolvem quatro fases, distintas nos conceitos, embora não tanto na execução:

Prospecção: a procura de uma jazida, visando a sua descoberta;

Exploração: o estudo do corpo julgado jazida, compreendido pelo conhecimento de suas características (volume, teores e valor, etc.).

Desenvolvimento: a execução de acessos e preparação da jazida, para possibilitar o seu aproveitamento industrial; pode envolver execução de galerias, remoção de capeamento, preparação de bota-foras, drenagem, instalações de apoio, etc.;

Lavra: o aproveitamento industrial de jazida, já provada e suficientemente desenvolvida; compreende serviços de desmonte, transporte, segurança, higiene, ventilação, iluminação,

esgotamento, etc.; também é denominada **exploração**.”

Maia (op. cit.) comenta que “o conceito de pesquisa mineral vai assumindo uma acepção restrita, isto é, procura e estudo de ocorrências minerais que, potencialmente, se afiguram economicamente utilizáveis. Em outras palavras, de possíveis jazidas”. “Seu objetivo seria a descoberta, caracterização e avaliação de substâncias minerais úteis ... Abrangeria, portanto, duas das quatro fases em que se divide a mineração: prospecção (procura) e exploração (estudo e caracterização)”.

Sob um ponto de vista legal “Entende-se por pesquisa mineral a execução dos trabalhos necessários à definição da jazida, sua avaliação e a determinação da exequibilidade do seu aproveitamento econômico.” Além disso “considera-se como jazida toda massa individualizada de substância mineral ou fóssil, aflorando à superfície ou existente no interior da terra, e que tenha valor econômico; e mina, a jazida em lavra, ainda que suspensa” (Código de Mineração, decreto lei nº 227, de 28 de Fevereiro de 1967).

O anterior “Código de Minas” (decreto lei de 25 de janeiro de 1940) apresenta as seguintes definições:

“Entendem-se por pesquisa os trabalhos necessários para o descobrimento da jazida e o conhecimento do seu valor econômico”.

“Considera-se como jazida toda massa de substância mineral ou fóssil, existente no interior ou na superfície da terra e que apresente valor para a indústria; mina, a jazida em lavra, entendido por lavra o conjunto de operações necessárias à extração industrial de substâncias minerais ou fósseis da jazida”.

A comparação entre as definições do Código de Minas e do Código de Mineração mostra claramente ser aquele “tecnicamente mais correto” (Maia, op. cit.); este autor tece alguns comentários valiosos, aqui reproduzidos:

a) “o pleonástico aflorando à superfície” (ver definição de pesquisa mineral).

b) “a nova conceituação de lavra é pedante e tecnicamente rebarbativa” (ver definição de jazida).

c) “mina não se cinge a uma jazida em lavra, ainda que suspensa, pois... consideram-se partes integrantes da mina

(Código de Mineração, art. 6º, parágrafo único) *edificações, construções, máquinas... servidões... veículos... materiais necessários do trabalho... Se tais elementos integram a mina, é claro que esta é algo mais que uma jazida em lavra...*”.

d) *“o beneficiamento das substâncias extraídas nunca foi lavra”*.

e) *“a lavra exclui os necessários serviços de desenvolvimento ou de preparação anterior à extração dos minerais úteis. Como esses serviços legalmente não pertencem à pesquisa, ficam sem situação legal... a definição técnica (de desenvolvimento) constava do Código de Minas... uma vez que não envolvia a restrição de ‘desde a extração das substâncias minerais úteis’”*.

Conforme Maia (*op. cit.*), não há um regime legal para a fase de prospecção, claramente exposto no Código de Minas (“descobrimento da jazida”), que sob a égide do conceito “pesquisa”, engloba prospecção e exploração, o que é, tecnicamente, correto. Os autores reconhecem a ausência de regime legal para a prospecção, mas não se justifica a frase tão comum utilizada por muitos: “A prospecção e a pesquisa mineral...”. Qualquer bom dicionário define pesquisa como sendo o conjunto de atividades que tem por finalidade a descoberta e a investigação... (no caso dos minerais, completar-se-ia a definição escrevendo-se:... de substâncias minerais úteis. Esse é o espírito do antigo Código de Minas).

Maia (*op. cit.*) observa que *“as leis devem ser cumpridas como são e não como se julgue que deveriam ser. As críticas formuladas, referentes mais a uma questão de forma que ao seu espírito, visam ao desenvolvimento analítico, na leitura ou interpretação desses dispositivos, mostrando que essa pode ser variável quando as expressões usadas se ressentem de significado técnico ou jurídico precisos”*.

As palavras prospecção e exploração derivam de termos da língua latina. *Prospecto* em latim significa olhar para longe, buscar ou procurar minerais, etc. Deriva do verbo inglês *to prospect*.

Exploração (*exploratio-onis*) é o ato ou efeito de explorar, isto é, estudar um território, etc.

Sintetizando a discussão acima definiremos:

1) Prospecção mineral significa os trabalhos geológicos, geoquímicos, geofísicos e de laboratório direcionados para a descoberta de concentrações minerais de interesse econômico. Como não é factível examinar cada quilômetro quadrado de um território, por inviabilidade financeira, usam-se critérios e guias prospectórios na tarefa da descoberta.

2) Exploração mineral é o processo de investigação e avaliação de depósitos minerais. Em procedimento preliminar obtêm-se dados e informações sobre os métodos mais adequados para o prosseguimento do trabalho ou, com os dados e as informações, paralisa-se o mesmo. Quando se pretende desenvolver um depósito para entrada em produção (lavra) faz-se exploração detalhada, que visa determinar **recursos** (medidos, indicados e inferidos), parte dos quais transformados em **reservas** (usando-se fatores modificadores). O tema será retomado em outra parte deste estudo.

Mineralogia e composição dos depósitos minerais

As jazidas são constituídas por rochas ou agregados minerais de interesse econômico, conforme já observado anteriormente. As **jazidas de minério** contêm minerais minérios, as **jazidas de minerais industriais**, matérias primas diversas para uso como fundentes, refratários, isolantes térmicos, na indústria química, na agricultura, na ótica, em joalheria, como abrasivos, etc. As **jazidas de rochas industriais** incluem materiais de construção (e de revestimento), e de uso em cerâmica e na fabricação de vidros, além de materiais combustíveis sólidos (carvões e folhelhos oleígenos), combustíveis líquidos (petróleos) e gasosos (gás). Outras **substâncias minerais líquidas** são águas doces (potáveis e para uso geral), águas minerais (potáveis, uso em balneários), águas salgadas de

fontes subterrâneas (salmouras). Uma classe especial de **substância mineral gasosa** é aquela dos gases inertes não combustíveis (He, Ne, Ar, Kr).

Sob um ponto de vista de classificação mineralógica, os principais grupos minerais presentes nos depósitos incluem:

a) Elementos nativos: Au, Pt, Cu, S, C (diamante e grafita).

b) Sulfetos, selenetos, teluretas, arsenetos, antimonetos, que contêm grande parte dos metais de jazidas de não ferrosos: Zn, Pb, Cu, etc.

c) Halogenetos (cloretos, brometos, iodetos, fluoretos).

d) Óxidos e hidróxidos: Fe, Mn, Al, Cr, Ti.

e) Carbonatos: calcita, dolomita, magnesita, siderita, rodocrosita, smithsonita, witherita, estroncianita, cerussita (usados, alguns deles, para produzir metais).

f) Silicatos (como minerais e compondo rochas industriais): micas, amianto, talco, feldspato, petalita, espodumeno, etc.

g) Niobatos e tantalatos.

h) Fosfatos, arsenatos, vanadatos.

i) Nitratos e boratos.

j) Sulfatos (barita, celestita, anglesita, anhidrita, gipsita, calcantita, etc.).

No caso das jazidas de minérios e de materiais não metálicos não há uma classificação natural; em geral, as classificações têm por base fatores diversos, incluindo economicidade. Isso significa que nem sempre são fatores intrínsecos que condicionam as jazidas; sempre há dependência de parâmetros diversos: mercado consumidor, tecnologia, infraestrutura – energia, transporte, etc. Economicidade quer dizer aproveitamento com lucro, desde que ligado a fatores de bem estar humano, e políticas de conservação e preservação do meio ambiente.

Jazidas de minérios podem ser classificadas em função do metal contido (minério de ferro, minério de manganês, etc.) ou metais, em função da ganga (minérios argilosos, silicatados, etc.), em função do teor (ricas, médias,

pobres), em função de parâmetros físicos, como dureza (duros, semiduros, semibrandos, brandos) e moabilidade; quimicamente há minérios refratários e não refratários.

Carvões são classificados com base nas proporções dos componentes chamados fuseno, durenó, clarenó e vitrenó; além disso, há que considerar o conteúdo de cinzas, de umidade e de substâncias voláteis, além do grau de coqueificação.

Os petróleos são constituídos por hidrocarbonetos – metânicos, naftênicos ou aromáticos. Podem conter enxofre, dentre outros elementos. Textos especializados tratam dos combustíveis, bem como da água.

O leitor poderá preparar fichas com dados sobre minerais de interesse econômico, organizados a partir dos elementos químicos extraídos dos mesmos (minerais minérios) ou como minerais e rochas industriais; por exemplo, alumínio, que pode ser obtido a partir de mineral minério (bauxita) ou pode ocorrer como componente de mineral industrial (exemplo: corindon).

2. As mineralizações e sua investigação

As mineralizações possuem peculiaridades que determinam o modo pelo qual devem ser estudadas (ou metodologicamente investigadas); dentre as peculiaridades destacam-se:

a) São inacessíveis (na prática) para observação visual, o que leva a se investigar o depósito por meio de exposições artificiais, dentro de limites nos quais se obtém amostras para estudos vários;

b) As dimensões dos setores mineralizados são incomensuravelmente maiores que as das exposições artificiais e das amostras;

c) As acumulações minerais têm estrutura anisotrópica e ampla variação nas dimensões dos elementos de heterogeneidade quando são considerados os distintos níveis estruturais.

Muitas das propriedades dos minérios não são acessíveis para observação direta, tais como: conteúdos de componentes úteis e nocivos, porosidade, umidade, densidade, etc. Deve ser considerado ainda que as amostras têm conteúdo limitado e os resultados obtidos com os estudos são as fontes básicas de informação para o julgamento da importância das propriedades da massa que se investiga.

As noções sobre dimensões e parâmetros dos elementos de heterogeneidade são obtidos do conjunto de observações seletivas contíguas e dependem da densidade e do arranjo da rede de observações. As principais questões metodológicas para o estudo dos jazimentos são: avaliação das possibilidades de uso de sondagens, de escavações várias e de métodos geofísicos, os fundamentos teóricos

da amostragem, os meios para criar sistemas ordenados de exposições artificiais, os princípios de sistematização dos dados de exploração, a modelagem dos objetos explorados e as propriedades dos minérios.

Meios de exploração e aplicabilidade

Os meios técnicos de exploração são básicos ou auxiliares. No primeiro caso criam-se interseções e cortes de exploração e incluem escavações e sondagens, assim como métodos geofísicos que garantam a qualidade da amostragem e a investigação do espaço entre escavações. Os meios auxiliares são usados para estudar e documentar os serviços (escavações e sondagens) de exploração e também para analisar e generalizar os resultados. Incluem estudos geológicos, geofísicos, geoquímicos, hidrogeológicos, de estabilidade, etc., oportunidade na qual se estudam a estrutura, a composição química, o tratamento de minério, etc.

As escavações mineiras fornecem a melhor informação sobre a composição e estrutura dos minérios. São acessíveis para observação, medições e desenhos. As paredes, o teto e o fundo das escavações podem ser fotografadas e analisadas com amostragem de qualquer tamanho. A partir das mesmas se cartografa geologicamente, estuda-se a composição, a textura, etc., do minério. Elas são muito importantes no estudo de jazimentos pequenos

e descontínuos controlados por elementos estruturais não uniformes e difíceis de cartografar. É importante, adicionalmente, comentar que podem ser desviadas para qualquer direção. De uma escavação pode-se fazer um poço para atingir outro nível, etc.

O principal defeito das escavações mineiras é seu alto custo, o tempo para realização e a necessidade de se organizar uma base considerável para suporte.

As **sondagens**, quando comparadas com as escavações asseguram menor quantidade de dados, pois geram menores volume de amostras e não são acessíveis para observação direta. Originam amostras para estudo e podem ser investigados geofisicamente. Como têm dimensão pequena, podem atravessar qualquer tipo de material incluindo rocha absolutamente decomposta e incoerente. As sondagens são o meio técnico mais usado na pesquisa, por causa do seu baixo preço, rapidez de execução, mobilidade, alcance e organização simples. Amplas frentes de trabalho podem ser criadas, sem uso de base complexa de apoio.

As sondagens podem ser feitas a partir da superfície ou subsuperfície e os furos podem ter qualquer orientação.

Os **métodos geofísicos** incluem métodos elétricos, radiométricos, magnéticos, eletromagnéticos, gravitacional e sísmico.

Nos levantamentos de campo, diversos princípios devem ser considerados. A exploração geofísica deve ser estreitamente ligada à investigação geológica e efetuada segundo seqüência adequada. A correlação de resultados geoquímicos e geofísicos é de capital importância. Corpos geológicos são localizados pela geofísica, porque têm diferentes densidades, condutividades ou susceptibilidade magnética em relação à encaixante, mas a presença de um dado elemento só pode ser corroborada por análise química. As fases individuais de programas geofísicos são organizadas de modo que após levantamento regional segue-se trabalho de campo. O uso de métodos diversos para deletar diferentes parâmetros geofísicos, de modo simultâneo, facilita a interpretação dos dados.

Os métodos geofísicos dependem do conhecimento

geológico da área e do seu desenvolvimento mineral, de fatores climáticos, etc. Métodos de terreno e perfilagem são usados na exploração de um depósito conhecido. A perfilagem e métodos adequados podem ser usados para ampliar o conhecimento nos furos de sonda e entre furos.

O tratamento computacional das informações geofísicas permite gerar mapas onde diferentes parâmetros geofísicos podem ser adicionados, superpostos, eliminados, etc.

Os métodos IP, SP, magnético e condutividade são aplicáveis à exploração detalhada, em furos de sondagem, enquanto o levantamento gravitacional é aplicado às escavações. Veios polimetálicos podem mostrar altas condutividade e polarização; se são posicionados em ambiente homogêneo, a geofísica é bem aplicável. A perfilagem da resistividade ou eletromagnética pode traçar zonas estruturais portadoras dos veios. Na investigação detalhada de depósitos polimetálicos, levantamento magnético e ou métodos IP, SP, eletromagnético e condutividade são efetuados nas sondagens.

A interrelação entre campo geofísico e estrutura geológica é deduzível pela correlação entre seções geológicas e registro geofísico detalhado nas seções. Isso é especialmente importante quando se procede ao uso do princípio da analogia. Métodos de ativação neutrônica têm sido amplamente usados em perfilagem contínua de furos.

Fundamentos sobre a amostragem

Como fundamentos teóricos da amostragem incluem-se os fatores que determinam a influência das propriedades e das condições de tomada de amostras (volume, forma) sobre a variabilidade dos conteúdos, assim como a credibilidade e a boa apresentação das amostras.

A variabilidade dos conteúdos depende da gênese e das condições geológicas. Quanto maiores a descontinuidade e diferença de dimensões das acumulações naturais, mais alta é a irregularidade de seu posicionamento espacial, mais baixa é a concentração do componente útil e tanto maior é o grau de variabilidade do jazimento. Sua avaliação é feita a partir da frequência de distribuição.

Curvas de frequência de distribuição de conteúdos para campos geológicos homogêneos têm apenas um máximo. Se existem mais máximos, garantidas as quantidades e intervalos das classes, existe heterogeneidade, por exemplo, manifestada por mais de uma geração de mineralização, etc.

Curvas de frequência com **assimetria esquerda** são características de mineralização descontínua, com diferenças bruscas de dimensões e irregularidade da disposição espacial e com baixo grau de concentração do componente útil. As curvas **simétricas** e **assimétricas direitas** revelam depósitos de mineralização contínua e uniforme e, usualmente, com alta concentração. A assimetria direita se torna mais evidente com o aumento do teor médio e grau de estabilidade em direções variadas.

A variabilidade também depende do volume das amostras, pois o conteúdo está inseparavelmente ligado à geometria do espaço ocupado pelas amostras. Não há como falar de teor sem indicar a que volume corresponde. Os conteúdos obtidos de amostras correspondem a seus volumes e não às suas áreas de influência.

Amostras de pequeno volume podem ter teor máximo ou nulo e a variabilidade dos conteúdos, a partir de uma série de amostras, será a maior possível. O aumento do volume das amostras nivela os conteúdos e, conseqüentemente, a variabilidade.

As dimensões das amostras também modificam a variabilidade quando se trata de amostras moídas e homogeneizadas ou de amostras naturais. Quando se extraem e preparam amostras, a estrutura primária é desfeita. Por isso, os volumes submetidos a ensaio são conjuntos de volumes primários cujos conteúdos são reciprocamente independentes e têm distribuição gaussiana. Nesse caso, o aumento do volume em n vezes, reduz as dispersões dos conteúdos do mesmo número. Se a somatória dos volumes das amostras envolve amostras básicas de igual volume, então podemos usar muitas amostras de pequeno volume como correspondendo a um número limitado de amostras de grande volume, pois a dispersão de uma amostra de volume $V = nv$ é igual à soma das dispersões de n amostras de volume v .

Um exemplo patente da influência do volume pode ser dado em relação aos kimberlitos. O teor médio de um kimberlito, em termos de quantidade de diamantes é uma décima milionésima parte do seu volume. Por isso uma amostra representativa deve ser dez milhões de vezes maior que o volume de um cristal.

A variabilidade dos conteúdos também é influenciada pela forma e dimensões das amostras. A dispersão dos teores de amostras de igual volume, tomadas em locais diferentes, pode ser muito variável, em função da forma.

Uma pequena amostra de forma cúbica, por exemplo, pode ser metal puro ou rocha estéril, enquanto uma amostra linear de igual volume (p. ex. 1 metro de comprimento por um décimo de milímetro de seção transversal) conterá minério e estéril. As dispersões dos conteúdos calculados a partir de amostras de forma cúbica são muito diferentes daqueles calculados a partir de amostras lineares. G. Matheron (1962) estabeleceu o conceito de "equivalente linear" para uma amostra de volume v : é a amostra linear l com seção transversal infinitamente pequena, cuja dispersão dos conteúdos é igual ao da amostra de volume v .

Se a estrutura do minério é isotrópica, o equivalente linear de figuras geométricas elementares são:

- a) Para um cubo de lado a : $l = 2,7 a$;
- b) Para um paralelepípedo de lados a , b e c
($a \geq b \geq c$): $l = a + b + c/2$

Usando essa última expressão para calcular os equivalentes lineares de amostras de canal, percebe-se que seu valor depende do comprimento da amostra. Por exemplo, os equivalentes lineares de amostras de canal com 2 m de comprimento e seções de 20 x 10 cm e 1 x 1 cm são 225 e 201,5 cm, respectivamente. Os equivalentes lineares são 10% diferentes em comprimento e 100 vezes em volume. O mesmo funciona para amostras de sondagem (testemunhos), com equivalente: $l = a + 0,75 d \sqrt{\pi}$ onde a é o comprimento e d o diâmetro.

Amostras de canal e volumétricas podem ser comparadas. Por exemplo, o equivalente linear de uma amostra de 1 m de avanço com seção de 2 x 1,7 m é $l = 1,7 + 0,5 = 4,2$ m. O equivalente linear de uma amostra de canal no mesmo local será (para canal com 1 m de comprimento e seção 10 x 2 cm): $l = 1 + 0,1 + 0,01 = 1,11$ cm.

Assim para se ter características comparáveis de variabilidade seria preciso aumentar quatro vezes o comprimento das amostras de canal.

Se a estrutura é anisotrópica, o equivalente é:

$l = a + b/k + c/2m$ onde a é a dimensão segundo a direção de maior variabilidade, b e c são dimensões segundo as direções média e mínima e k e m coeficientes relativos ao número de vezes que a variabilidade em uma dada direção é menor que a da direção máxima.

Dois conceitos importantes da teoria da amostragem são a autenticidade e a boa representação da amostra. Uma amostra é autêntica se o conteúdo da mesma (c_i) corresponde ao conteúdo do volume onde foi retirada (c). O valor $\Delta = c - c_i$ é o erro da amostragem, que pode ser aleatório ou sistemático. O primeiro corresponde a:

$$\sum_1^n \Delta_i = 0 (n \rightarrow \infty)$$

onde n é o número obtido de amostras.

O erro sistemático tem valor e sinal constantes e surge como resultado de ações diversas.

Amostras reais não devem ter e os erros aleatórios não devem ultrapassar certos limites.

A boa representação dos parâmetros dos corpos minerais é com conceito complexo. Segundo Kreiter (1968) "o grau em que o conteúdo dos componentes na amostra corresponde a seu conteúdo no todo". Isso significa que durante a amostragem, cada amostra pode não ser representativa, problema enfrentado coletando-se grande número de amostras, particularizadas se necessário.

Delineação dos corpos minerais

O método empregado na delineação depende da arquitetura (morfologia) do corpo e de sua atitude. Em função dessas condicionantes indica-se, para corpos tabulares horizontalizados, delineação em seções horizontais, enquanto para corpos verticais, delineação em seções verticais. O modo mais preciso de delinear um corpo mergulhante é a adaptado de uma seção no plano do mergulho. Contudo, raramente tal procedimento é adotado, acreditamos que por conservadorismo, uma vez que é anticonvencional.

Corpos alongados do tipo cordão são melhor delineados no plano horizontal. Corpos alongados, de forma tubular (chaminés), verticalizados, são delineados com uso de seções horizontais e verticais, enquanto corpos equidimensionais são delineados em qualquer plano.

A delineação de corpos de forma irregular é uma tarefa difícil. Em geral, à medida que são lavradas, é feito registro em seções adequadamente posicionadas, objetivando entendimento de seus limites.

A arquitetura (geometria) de um depósito mineral é controlada por limites estratigráficos, litológicos, estruturais e geoquímicos, em separado ou combinados (dois ou mais controles). É claro que o tamanho dos depósitos não coincide com o das jazidas; essas são menores, em função de condicionantes diversos, tais como teor de corte, presença de elementos deletérios e outros.

Além dos fatores geológicos e econômicos, há que considerar para a delimitação fatores tecnológicos como, por exemplo, largura mínima de lavra, diluição, etc.

O corpo mineral é o alvo a ser atingido (isto é, interceptado) pelos serviços de pesquisa. Sem isso, não há como praticar a delimitação. O sucesso nas intersecções é alcançado quando se conhece a organização espacial dos corpos minerais, que é baseada em seus parâmetros geométricos intrínsecos (arquitetura – que envolve forma – atitude e tamanho).

A configuração e interrelação dos parâmetros geométricos e da malha (retículo) de pesquisa, e o tipo de serviço exploratório (poços, trincheiras, galerias, sondagens) que opera como sensor, são as chaves para se obter resultados confiáveis.

Os parâmetros geométricos do corpo mineral são probabilísticos em sua natureza, enquanto os do retículo (geometria e espaçamento) são determinísticos. Os próprios serviços exploratórios, organizados geometricamente em um retículo, têm direção (quando horizontalizados) ou, então, rumo e inclinação, além de extensão.

Os parâmetros geométricos dimensionais dos corpos minerais compreendem comprimento $\geq$ largura $\geq$ espessura. Esses parâmetros são passíveis de definição para corpos tabulares e alongados, representados na Figura 2.1, em muitos casos coincidem com os parâmetros que definem a atitude dos corpos – direção e mergulho, rumo e caimento.

Na Figura 2.1A tem-se corpo tabular com o comprimento (c) coincidindo com a direção do mergulho e a largura (l) com a direção do corpo. A espessura (e) é normal a c e l. Na Figura 2.1B o corpo tabular tem comprimento coincidindo com a direção, a largura com o mergulho e a espessura é normal ao mergulho e direção. Na Figura 2.1C o corpo é filoneano e tem os elementos dimensionais organizados como na Figura 2.1A. Na Figura 2.1D tem-se corpo alongado (uma chaminé), verticalizado, com o comprimento paralelo ao eixo maior do mesmo, enquanto a largura e a espessura são aproximadamente

iguais. Na Figura 2.1F o corpo alongado tem o comprimento paralelo ao caimento do mesmo. Na Figura 2.1E, parte de um corpo alongado (cordão como, por exemplo, um aluvião), o comprimento é paralelo à direção do corpo, que é horizontalizado.

Em relação aos parâmetros de atitude, os corpos tabulares são horizontais, verticais ou mergulhantes, enquanto corpos alongados cilíndricos podem ser verticais, horizontais ou inclinados.

O conhecimento de um depósito mineral é iniciado com a primeira formulação sobre a **forma** (ou arquitetura) do mesmo, com base em dados de observação. Depósitos minerais (corpos geológicos em geral) são classificados em quatro tipos morfológicos (ver Figura 2.1):

- a) **Tabulares** (camadas, veios, lentes);
- b) **Alongados** (chaminés, cordões);
- c) **Isométricos ou equidimensionais**;
- d) **Irregulares**.

Os depósitos minerais, do mesmo modo que as estruturas, são ligados a processos de formação endógenos e exógenos. Segmentos da crosta terrestre nos quais ocorrem depósitos minerais geneticamente relacionados do mesmo tipo são chamados distritos minerais. Exemplo: o Distrito do Alto Paranaíba (no Triângulo Mineiro e Sudeste de Goiás), no qual ocorrem carbonatitos – silicocarbonatitos de idade cretácica, com mineralizações de fosfato, titânio, nióbio, terras raras, magnetita. As províncias minerais são parcelas da crosta contendo mineralizações de idade diversa como, por exemplo, a Província do Quadrilátero Ferrífero, com mineralizações de idade arqueana, proterozóica inferior e superior, etc.

O aparecimento dos depósitos minerais é controlado por fatores estruturais, temporais e ambientais, o que significa que não ocorrem em quaisquer regiões, épocas e litologias.

Em termos de distritos e províncias a estruturação regional e a litologia são os controladores dos depósitos. Depósito endógenos, de idade precambriana têm distribuição e localização condicionadas por estruturas de de-

formação, tais como:

- a) **Estruturas dobradas** em rochas sedimentares e vulcânicas e seus equivalentes metamórficos.
- b) **Estruturas falhadas**;
- c) **Estruturas diaclasadas**;
- d) **Estruturas foliadas e aleitadas**;
- e) **Estruturas de contato**;
- f) **Estruturas tubulares**;
- g) **Disseminações (*schlieren*)**;
- h) **Diques e maciços**.

Os **depósitos tabulares** apresentam a máxima variabilidade segundo a espessura. Por isso os serviços de exploração e as seções de representação devem se orientar normalmente à direção geológica; com arranjo regular dos nós de amostragem. Os teores são calculados por média ponderada, ou por blocos poligonais (com nós no centro dos blocos), os volumes correspondem ao produto da espessura média pela área, etc.

Os **depósitos alongados** são explorados segundo seções orientadas de modo variado. Por exemplo, se o alongamento segue arranjo horizontal, as seções de representação devem ser verticais; para depósitos verticais as seções serão horizontais.

Os **depósitos equidimensionais** são representados em seções normais umas em relação às outras.

Os **depósitos irregulares** devem ser divididos em unidades menores que contenham os serviços exploratórios.

A questão exposta será retomada quando tratarmos da metodologia de delineação.

Sistemas exploratórios

A delineação acurada de um corpo mineral envolve correta seleção do sistema exploratório utilizado na pesquisa. Por "sistema exploratório" entende-se o modo de arranjo dos serviços exploratórios em relação aos parâmetros da arquitetura do corpo e da sua atitude. Não é escopo desse trabalho abordar a questão dos sistemas; uma síntese, contudo, será apresentada, de modo que o leitor reveja o tema.

A morfologia (arquitetura) e a atitude dos corpos minerais condicionam o arranjo dos serviços exploratórios. Com base nesse princípio, conjugado com a investigação de centenas de depósitos minerais no território da antiga União Soviética, V.I., Biryukov (1962, apud Kuzvart & Bohmer, 1986) estabeleceu uma classificação para os sistemas exploratórios, suportada pela disposição dos cortes (perfis) exploratórios. Em resumo, tem-se nove grupos de sistemas, subdivididos em vinte e sete tipos, esses últimos, função dos meios utilizados na exploração.

Um rearranjo e uma simplificação do esquema do autor mencionado permite uma classificação em classes (segundo a disposição dos perfis exploratórios), grupos (segundo a disposição das intersecções nos perfis) e subgrupos (segundo os meios utilizados), conforme é apresentado a seguir.

Classe I: Perfis Verticais. Envolve a execução de perfis atravessando verticalmente o depósito, nos quais os meios exploratórios são representados interceptando o mesmo. Nesses perfis, que constituem a documentação fundamental relativa ao depósito, são assinalados teores, extensões de tipos de minério, etc. Em geral são paralelos entre si. Contudo, em muitas situações, é conveniente a construção de uma rede de perfis verticais perpendiculares uns aos outros ou mesmo, transversais (dependendo da organização dos serviços, em planta).

Grupo 1. As intersecções dos serviços de pesquisa são verticais e paralelas entre si, no perfil. Há subgrupos

com furos, com poços e misto, em parte representados na Figura 2.2.

Grupo 2. As interseções dos serviços de pesquisa são inclinadas e paralelas entre si, no perfil. Envolve subgrupos com furos rasos, profundos ou uma combinação, em parte representados na Figura 2.3.

Grupo 3. As interseções dos serviços de pesquisa são verticais e inclinadas, entrecruzadas; os subgrupos compreendem arranjos com poços e furos de sonda, conforme Figura 2.4.

Grupo 4. As interseções dos serviços de pesquisa são verticais e horizontais, entrecruzadas; os subgrupos utilizam poços, furos verticais, galerias e combinações. A figura 2.5 representa em parte o grupo.

Grupo 5. As interseções dos serviços de pesquisa são verticais, horizontais e inclinadas, entrecruzadas; os subgrupos têm arranjos com poços, galerias e furos de sonda, conforme representado na Figura 2.6, em parte.

Classe II: Perfis Horizontais. Nesta classe os perfis são horizontais e atravessam todo o depósito. Os meios exploratórios aparecem representados em níveis sucessivos, paralelos entre si; aqueles serviços que interessam níveis diversos são mostrados pelos seus traços. Como no caso da Classe I, os perfis servem como documento básico.

Grupo 1. As interseções dos serviços exploratórios com o corpo mineral são horizontais e paralelas entre si. Os serviços podem se posicionar em um mesmo nível ou em diversos níveis, caracterizando dois subgrupos, onde o meio exploratório principal são galerias. A Figura 2.7 mostra exemplos.

Grupo 2. As interseções dos serviços exploratórios são

horizontais e entrecruzadas entre si. Os subgrupos compreendem arranjos com galerias e travessas, com galerias e furos paralelos ou em leque e com galerias, travessas e furos paralelos em leque. Exemplo é dado na Figura 2.8.

Grupo 3. As interseções dos serviços são organizadas de modo a tocar o corpo mineral horizontal e vertical, porém entrecruzando-se. Os subgrupos têm galerias com subidas e descidas e galerias com travessas, subidas e descidas. A Figura 2.9 ilustra uma situação comum.

Grupo 4. As interseções dos serviços com o corpo mineral são feitas horizontal e verticalmente, segundo um retículo. O subgrupo mais característico é o caso de arranjo reticular de galerias, conforme Figura 2.10.

Classe III: Perfis Combinados. Nesta classe tem-se arranjo combinado de perfis verticais e horizontais, envolvendo grupos muito diversos e variados subgrupos.

A orientação, forma e dimensões da malha prospectória (projeção do conjunto de seções em um plano) são os constituintes da **geometria** da rede.

O uso de redes regulares garante a objetividade dos dados, contribui para revelar os componentes não aleatórios da variabilidade e favorece a aplicação dos métodos matemáticos de elaboração.

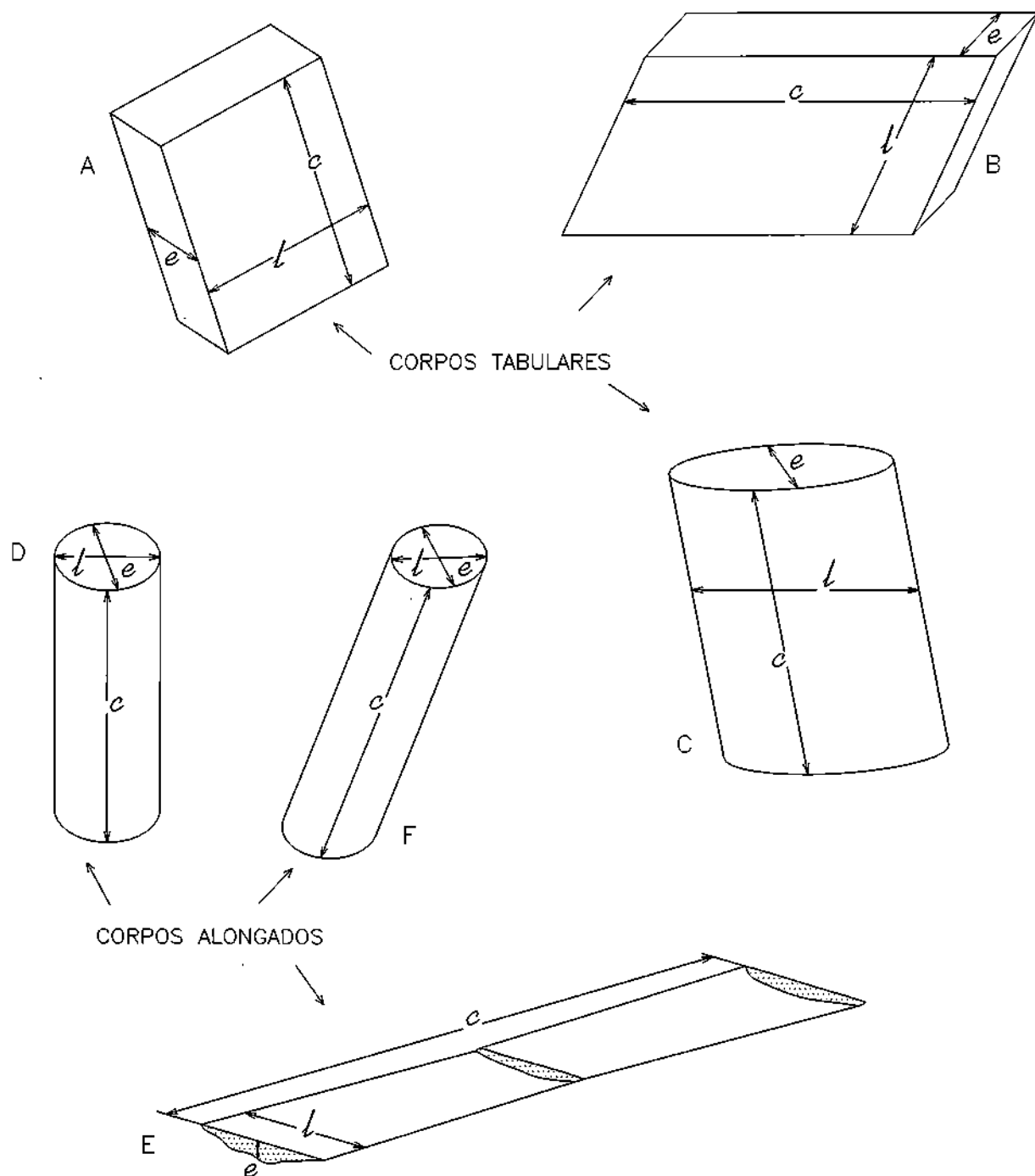


Fig. 2.1 Parâmetros dimensionais de corpos tabulares e alongados. (c = comprimento, l = largura, e = espessura)

Modelagem

A modelagem como modo de conhecer as regularidades do depósito mineral permite avaliar as propriedades do objeto de estudo. O modelo é criado com base na **Teoria da Semelhança**; assim, é possível comparar o modelo com o objeto de observação.

Os modelos são gráficos, volumétricos, geométrico-mineiros e matemático-geológicos, que tratam da estrutura e das propriedades das acumulações minerais (espessura, teor, etc.).

Os **modelos gráficos** de mapas e seções são o procedimento usual para reconhecer a geometria do depósito, sua arquitetura, sua estrutura, etc. Permitem uma avaliação qualitativa dos resultados exploratórios.

Os **modelos volumétricos** são cópias reduzidas (esculturas, transparências) dos corpos minerais. Em geral são criadas sobre transparências.

Os **modelos geométrico-mineiros** são uma variedade dos modelos gráficos. O modelado dos valores numéricos da propriedade é realizado graficamente por meio de isolinhas. Nos mapas e seções, essas curvas formam superfícies que correspondem a diferentes tipos de funções.

Os **modelos matemático-geológicos** permitem descrever as características quantitativas da variabilidade espacial das propriedades e servem como base para detectar erros, calcular reservas, aprimorar a informação a partir dos dados iniciais, otimizar as condições do trabalho exploratório, etc. Permitem generalizar e sistematizar as regularidades observadas. Seus princípios básicos envolvem:

a) A aceitação do modelo matemático é feita a partir da condição de que suas propriedades coincidam com as de objeto modelado ou, dito de outro modo, com as conclusões geológicas no momento da modelagem;

b) A complexidade estrutural e a limitação dos dados dificultam o uso de tais modelos. Sua grande maioria é probabilística, se bem que a manifestação da

variabilidade aleatória das propriedades aponta não para a falta de regularidade geológica, mas para a insuficiência de conhecimento;

c) Não se modelam propriedades reais, mas sim sua variabilidade, no nível ou escala de estudo.

A escolha do método da investigação depende da massa de informações, dos objetivos do trabalho, da existência de relações entre os valores do parâmetro estudado em pontos contíguos e do caráter dessas relações. Em função disto os dados podem representar:

- 1º) **Magnitudes aleatórias não independentes;**
- 2º) **Magnitudes aleatórias autocorrelativas;**
- 3º) **Magnitudes mutuamente relacionadas no espaço;**
- 4º) **Magnitudes aleatórias com periodicidade.**

Nos casos 1, 2 e 4 usam-se modelos probabilísticos e, no caso 3, modelos determinísticos.

Os modelos geoestatísticos estabelecidos por G. Matheron ocupam uma situação intermediária, pois se baseiam no conceito de variável espacial relacionada com seu campo geométrico.

Algumas observações pertinentes a modelos de depósitos minerais são apresentadas a seguir, com ênfase sobre o modo de ocorrência, a morfologia (forma), e outros parâmetros. Alguns dos modelos são característicos de um determinado metal.

Depósitos de Cu-Mo porfírico. A litologia principal que hospeda a mineralização é quartzo monzonítica; têm grandes dimensões, formato irregular, com teor baixo e distribuição irregular do metal de interesse. A mineralização é constituída por massas esfarrapadas de sulfetos disseminados e veios de sulfetos. Os maiores teores da mineralização hipogênica ocorrem em associação com sistemas de fraturas. Há zonas supergênicas enriquecidas e zonas oxidadas intensamente (alterações potássica, filica,

argílica e propilítica). O processo de alteração origina zoneamento mineral, inclusive de sulfetos.

Depósitos de ouro em zonas cisalhadas. O formato é irregular, em geral. As encaixantes são variadas e há zonas estereis intercaladas com zonas mineralizadas. As zonas ricas são estreitas, com venulações descontínuas, com ouro não visível. A mineralização é acompanhada por pirita, fuchita, turmalina, carbonato.

Depósitos estratiformes. Trata-se de depósitos de metais de base, de ouro, etc., contidos em uma unidade litológica específica, em geral ligados a aspectos sedimentares. Podem ser espessos, o teor é uniforme e a granulação variável e, muitas vezes, muito fina.

Depósitos do tipo Mississippi Valley. São encaixados em rocha carbonática e podem ser tabulares, lenticulares ou ocorrer como brechas de colapso, em carste. Contêm Pb-Zn em sulfetos (galera e esfaelita), com teor de metais acima de 5%, comumente. Os sulfetos são visíveis e o contato com a encaixante é nítido.

Otimização da pesquisa

A otimização da pesquisa mineral é **função dos meios técnicos disponíveis, do sistema de exploração, da geometria da rede (malha) exploratória e da quantidade de impactos** (número de interseções na mineralização). Otimizar a pesquisa, em função das quatro condicionantes mencionadas significa, então, executar o trabalho no menor tempo possível e com a menor quantidade de dinheiro (sem prejudicar a execução das obras de pesquisa), desde que seja garantido o cumprimento do objetivo da investigação.

Os meios técnicos disponibilizados dependem de fatores geológicos, tecnológicos e econômicos.

Os fatores geológicos envolvem as relações entre os conteúdos (teores e quantidades de minerais) e a estrutura do depósito, da trama (arranjo das estruturas repetitivas

planares e lineares; por exemplo, bandamento), da morfologia das concentrações e de sua forma e composição.

Os fatores tecnológicos consideram o sistema de lavra, a hidrogeologia, a estabilidade dos taludes, a dureza do material, etc.

Os fatores econômicos levam em consideração o acesso às áreas, o custo de instalação de acampamento, o valor da substância mineral sob exame, etc.

O sistema de exploração a adotar é crítico para o sucesso da investigação. Por exemplo, a interseção dos serviços com o corpo mineral deve situar-se na direção mais próxima da máxima variabilidade das propriedades e atingir a espessura máxima do depósito e de suas encaixantes. As interseções são contínuas e os valores médios das propriedades sob exame devem ser parecidos com os valores reais, a menos dos erros técnicos.

As observações dos parâmetros entre as interseções são interpoladas. Os valores médios calculados na seção são diferentes dos valores reais, por causa dos erros de interpolação e por causa das diferentes distâncias entre interseções.

A morfologia do corpo mineral e sua trama são os principais fatores de seleção da classe de sistema exploratório que se adota.

A geometria determinada no resultado exploratório depende da estrutura e da distribuição dos teores. Têm-se os seguintes arranjos:

- a) Depósitos estruturalmente contínuos, com distribuição regular de teores;
- b) Depósitos estruturalmente contínuos, com distribuição irregular dos teores;
- c) Depósitos estruturalmente descontínuos, com distribuição regular dos teores;
- d) Depósitos estruturalmente descontínuos, com distribuição irregular dos teores.

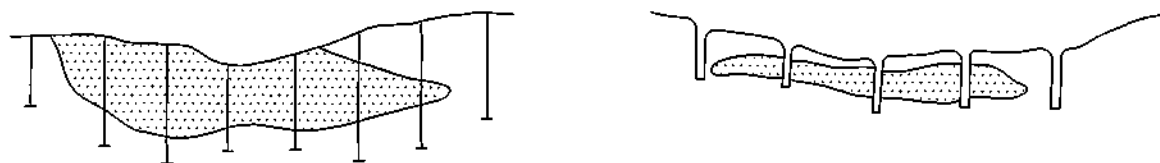


Fig. 2.2 Sistema exploratório da Classe I, Grupo 1: seções verticais com serviços verticais.

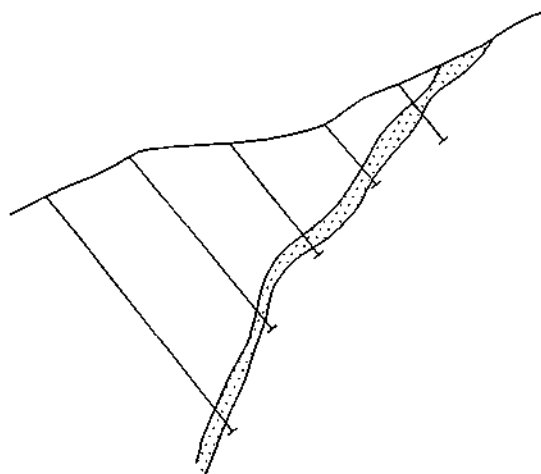


Fig. 2.3 Sistema exploratório da Classe I, Grupo 2: seção vertical, com sondagens inclinadas, rasas e profundas.

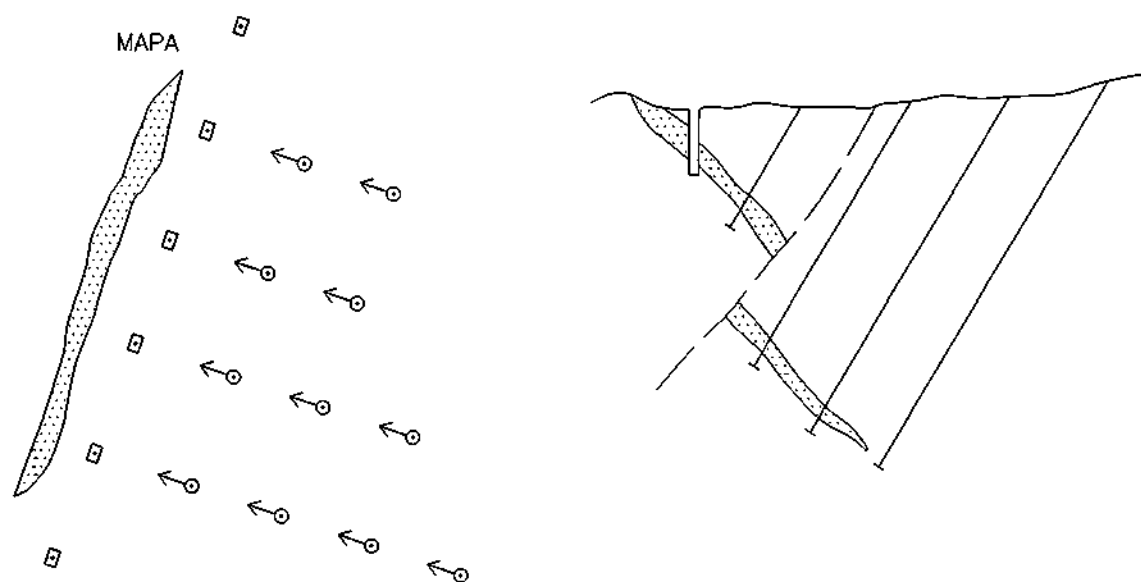


Fig. 2.4 Sistema da Classe I, Grupo 3: mapa e seção vertical com poço vertical e furos de sonda inclinados.

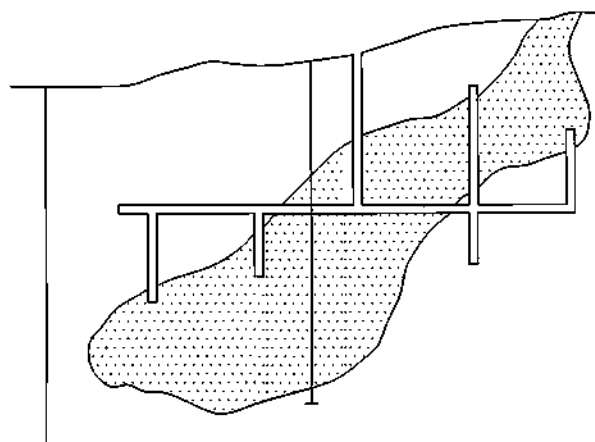


Fig. 2.5 Sistema exploratório da Classe I, Grupo 4: seção vertical com poço, galerias, subidas e descidas, além de furos verticais.

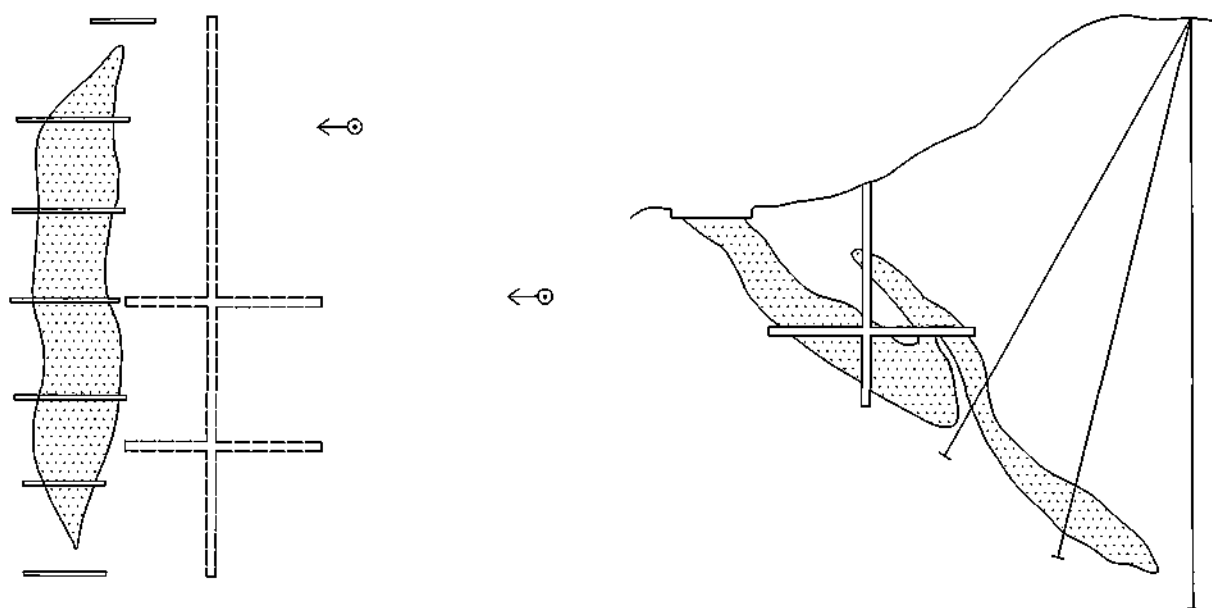


Fig. 2.6 Sistema exploratório da Classe I, Grupo 5: mapa e seção vertical. Ilustram-se trincheiras, poços, galerias e furos de sonda verticais e inclinados.

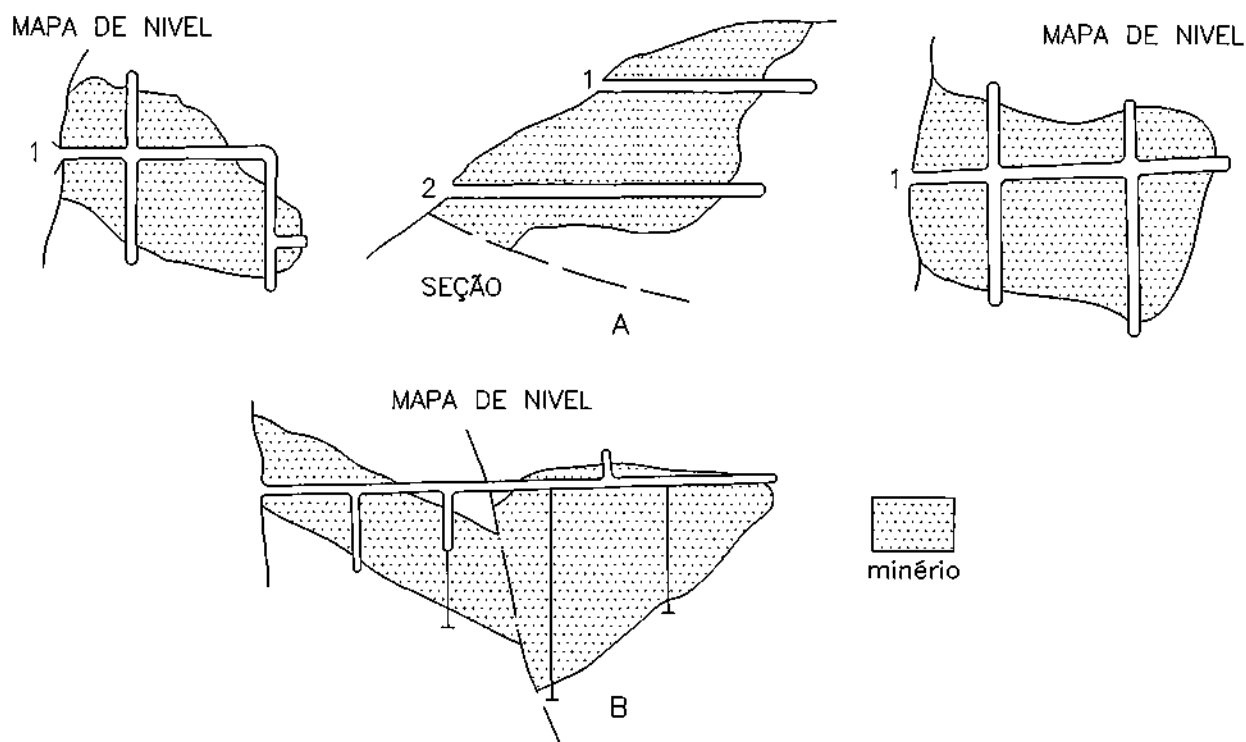


Fig. 2.7 Sistema exploratório da Classe II, Grupo 1: em A, seção vertical com dois níveis, com serviços horizontais (galerias e travessas); em B, mapa de nível com galeria, travessas e furos de sonda, horizontais. Os serviços são paralelos entre si.

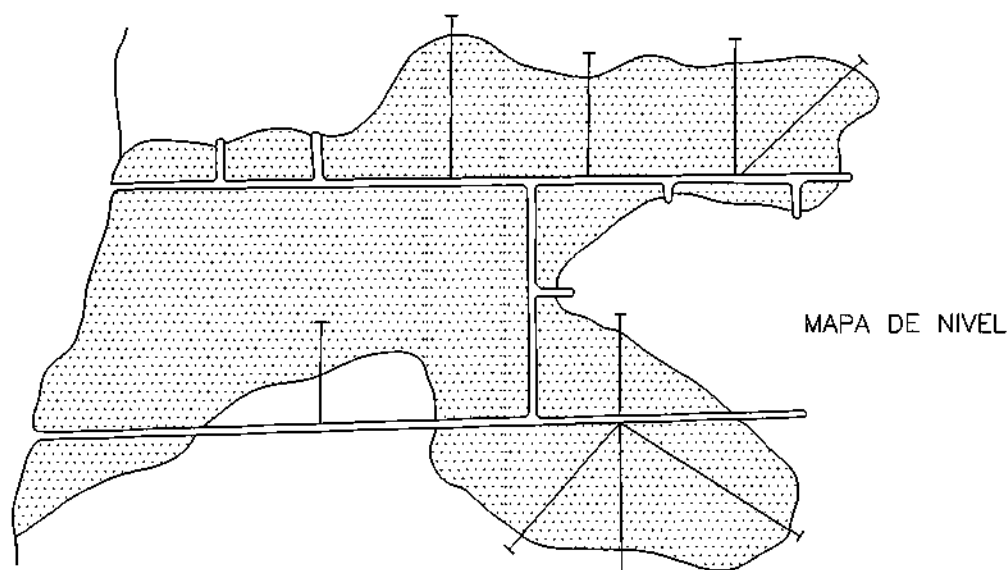


Fig. 2.8 Sistema da Classe II, Grupo 2: mapa de nível mostrando serviços horizontais entrecruzados.

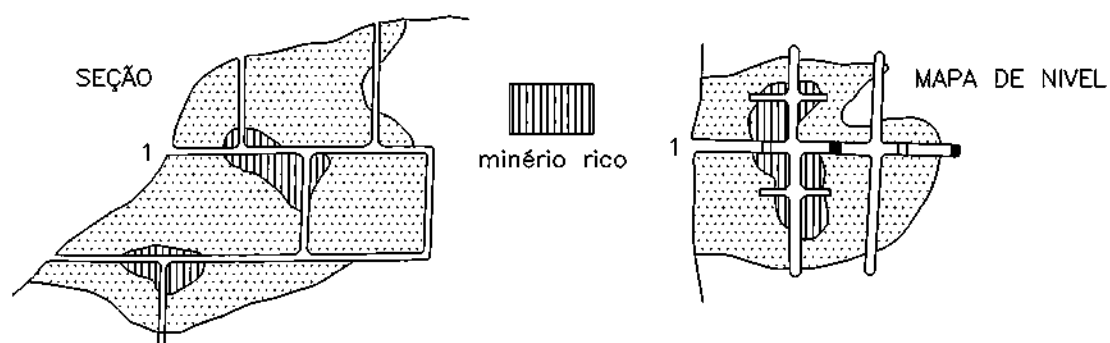


Fig. 2.9 Sistema da Classe II, Grupo 3: Galerias, travessas, subidas e descidas, entrecruzadas.

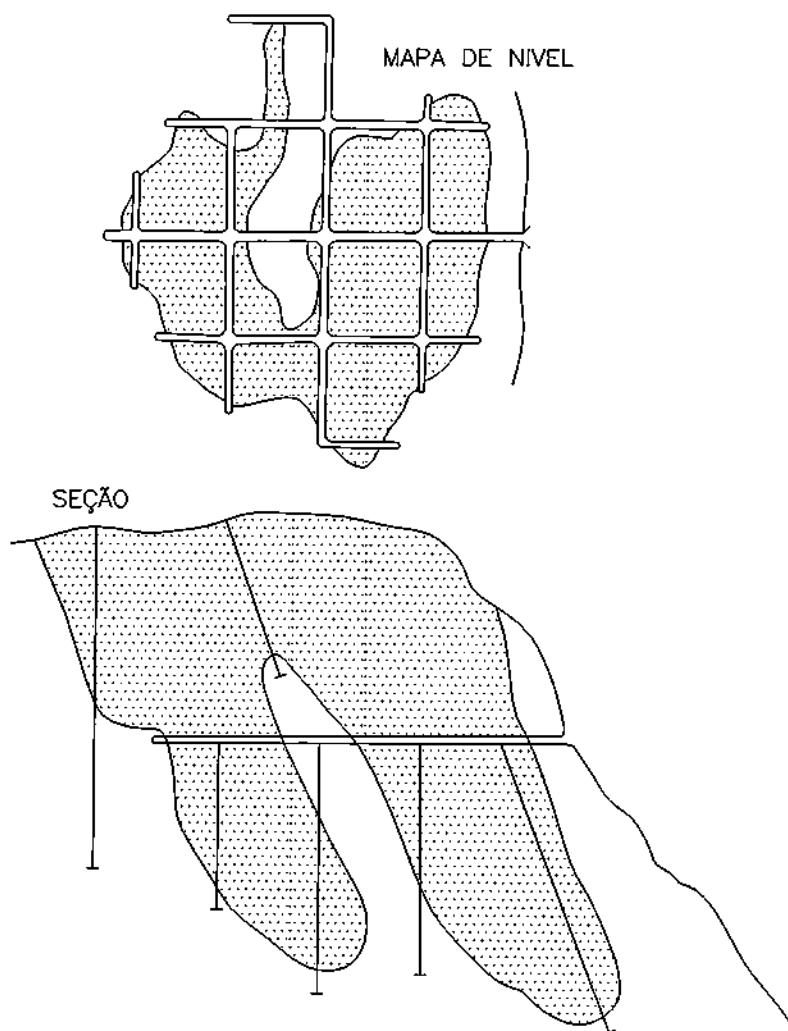


Fig. 2.10 Sistema da Classe II, Grupo 4: galerias em arranjo reticular, com furos paralelos, verticais e inclinados.

Utilização dos dados da pesquisa mineral

Já foi mencionado que a delineação dos depósitos minerais objetiva estabelecer recursos e reservas. No processo de delineação estabelecem-se qualidade e quantidade da substância sob estudo e sob consideração de fatores modificadores, verifica-se a conveniência de explorar o depósito.

A prática da delineação é feita durante a vida do depósito, desde a descoberta até a exaustão, tornando mais eficiente a extração e permitindo melhor produtividade.

A delineação é uma consequência da intensidade da exploração; concluída, permite estabelecer com o máximo de cuidado o modo pelo qual se distribuem os teores (por exemplo) pelo conjunto do depósito. Além disso, orienta o método a usar para a extração e para o tratamento, os requerimentos de capital (para compra de equipamentos), os custos de produção, etc.

Delineam-se depósitos minerais por uma questão de necessidade e de uso dos resultados. Há duas condicionantes críticas na delineação: 1) natureza e caráter do depósito; 2) dados obtidos. O conhecimento da primeira condicionante e a qualidade e quantidade da segunda condicionante é que tornam confiável a delineação.

Requerimentos e critérios para cálculos

A partir da delineação estimam-se recursos e reservas. Nenhum cálculo envolvendo a delineação deve ser realizado se não for utilizado. O melhor método de cálculo é aquele que é simples, rápido, confiável e consistente com o caráter do corpo mineral, em função dos dados disponíveis, e que seja adequado para verificação. O custo dos cálculos deve ser muitas vezes menor quando comparado com o

custo da exploração e desenvolvimento de um depósito.

Mesmo quando métodos mais complexos são empregados isto se justifica por causa da utilização de computadores, que operam com extraordinária rapidez. Por isso, na escolha do método ou métodos de cálculo, as peculiaridades e a conveniência da automação devem ser levadas em conta, especialmente quando se consideram a magnitude e a precisão requeridas.

O principal requerimento é tratar de modo objetivo os dados reais e por isso importa utilizar método (ou métodos) de cálculo que resista aos mais variados testes e que não dependa (ou dependa muito pouco) de julgamento. Por isso os métodos matemáticos são os mais adequados, pois que se o modelo geológico do depósito for correto o tratamento matemático torna-se absolutamente confiável. Em caso contrário, o tratamento matemático é uma virtualidade.

Quando se delinea um depósito mineral, objetiva-se ilustrar a distribuição e valor das variáveis no espaço geológico.

A confiabilidade que mencionamos depende principalmente da precisão do conhecimento sobre o depósito. Depende, também, de hipóteses aceitáveis na interpretação das variáveis, no estabelecimento dos limites do depósito, na precisão do cálculo de médias e no uso correto das fórmulas matemáticas.

Os requerimentos relacionados à quantidade (ou densidade) das observações que devem ser obtidas para as diferentes categorias (classes) de recursos e reservas minerais dependem primariamente do tipo de depósito. Nas últimas décadas a precisão do cálculo de reservas cresceu de modo saliente, em função dos avanços no campo da geologia econômica, aprimoramento dos métodos e técnicas de amostragem, melhor interpretação dos dados e aplicação de metodologias geomatemáticas, além de gerenciamento mais eficiente em todas as etapas de avaliação. Não é necessário realçar a importância do conhecimento geológico.

O uso dos computadores tornou possível registrar, armazenar, controlar e tratar grande quantidade de dados

exploratórios, fornecendo precisão superior, velocidade crescente e economia de trabalho, bem como menores custos.

Critérios para seleção de métodos

A seleção de um dado método para delimitação e, portanto, para estimativa de recursos e reservas depende de fatores diversos, destacando-se a geologia do depósito, o método de investigação (exploração) do mesmo, a confiabilidade na amostragem e nas análises físicas e químicas, a precisão requerida, etc.

Se a fase de delimitação é preliminar, visando obter dados iniciais para tomada de decisão utilizam-se métodos simples. Por exemplo, se contatos entre o corpo mineral e as encaixantes são observados, não é necessário detalhar o posicionamento dos mesmos; uma série de medidas permitirá estabelecer duas dimensões do corpo (comprimento e largura). Medidas estruturais podem ser usadas para avaliar a extensão do corpo ao longo do mergulho.

Em relação ao teor, as poucas amostras coletadas e analisadas poderão não ser suficientes para permitir uma avaliação próxima do real. Muitos depósitos minerais contêm propriedades que são detectadas apenas quando se tem exploração detalhada.

Exploração detalhada é necessária quando o objetivo é tomar decisão relacionada à extração mineral. Sabe-se que muitos depósitos minerais têm arquitetura simples mas a distribuição de teores pode ser irregular e inconstante.

Se a delimitação visa produzir dados para projeto de lavra deve ser levado em conta que para tal é preciso conhecer o teor limite, a recuperação durante a concentração, a diluição durante a lavra, etc. Depósitos tabulares são mais facilmente delimitados que quaisquer outros depósitos morfológicamente diferentes.

A adoção de uma malha regular de amostragem (poços,

trincheiras, furos, etc.) facilita o estabelecimento de uma delimitação mais precisa.

O operador responsável pela delimitação deve ter em mente que supersimplificação ou supercomplicação metodológica é inconveniente; no primeiro caso elimina-se a natureza geológica do depósito e no segundo, maximizam-se gastos.

Procedimentos

A delimitação de um depósito mineral é uma tarefa que envolve procedimentos científico e técnico. O procedimento adequado é selecionado em função do tipo de depósito e segue um ordenamento apropriado, que envolve:

a) **Avaliação geológica.** Isso significa que o depósito foi investigado sistematicamente e se fez coleta de atributos (propriedades do mesmo). Objetiva-se, a seguir, estabelecer o tipo de depósito, ou seja, o depósito possui em grau elevado características distintivas, ou seja, serve como “modelo”. Interessa-nos o componente empírico do modelo, que é um conjunto de dados pertencentes a uma assembléia, peculiares ao depósito. A seleção dos dados depende do julgamento do geólogo e isto deságua em ênfase ou viés crescente, quando se considera o modelo conceitual (genético).

A validade do modelo (qualquer que seja) precisa ser continuamente verificada. Modelos modificam-se, em função de novos dados.

O conhecimento da geologia do depósito, para que melhor se entendam as dimensões, a forma e a distribuição dos elementos de interesse, é que permite interpretar os dados da exploração.

Na avaliação geológica verifica-se criticamente o modo pelo qual os dados foram obtidos e organiza-se sua apresentação (tabelas, mapas e seções em escala adequada, diagramas estruturais, etc.)

b) **Método de exploração (e amostragem).** É necessário estabelecer se os dados obtidos são adequados e precisos, em relação ao modelo geológico, ou seja, o arranjo e densidade dos trabalhos exploratórios mostram que os dados são satisfatórios, permitindo estabelecer a morfologia do depósito e a maneira como as variáveis se distribuem em seu interior. Dados adequados e suficientes permitem que se calcule corretamente a qualidade e quantidade da mineralização, por classe de recurso e de reserva.

A justeza do método de exploração permite definir as propriedades das parcelas diversas do depósito (espessura, teores, propriedades físicas, etc.) e as quantidades existentes em termos de classe (inferidas, indicadas, medidas, etc.). Passa-se, em seguida, para a delimitação.

c) **A delimitação não é o objetivo final da exploração;** a delimitação conduz à subdivisão do depósito em segmentos com diferentes graus de confiabilidade. Uma vez selecionado o suporte para a delimitação é feita a traçagem dos limites mineralizados. Porções do depósito são observadas, outras são interpoladas e outras, ainda, extrapoladas.

d) **Uma vez delimitado o depósito mineral, o passo seguinte é estimar seu volume;** como a forma dos depósitos é, em geral, irregular, é necessário substituir tal forma por uma forma regularizada, projetada em um *datum* (uma seção plana); outra superfície, irregular, define a variação de espessura (por exemplo). Figuras geométricas simples são usadas para substituir a forma regularizada.

O depósito mineral é, então, dividido em blocos; cada bloco tem um ou mais dados produzidos pela exploração (por exemplo, dois furos de sonda, uma trincheira e poços, etc.).

Os recursos do depósito são determinados a partir dos volumes de cada bloco que, somados, fornecem o recurso global. Os blocos são divididos por classe de recurso. O fator densidade é então aplicado, fornecendo a tonelagem do minério.

Exemplos de representação de dados de exploração

Os depósitos minerais, quando com formato tabular, têm capa e lapa, isto é, têm encaixantes acima e abaixo. O próprio depósito é definido a partir de sua petrografia-mineralogia (por exemplo, uma camada de minério de manganês, com folhelho ardósiano na capa e na lapa), por seu teor, etc. Em inglês *capa* e *lapa* são chamadas *hangingwall* e *footwall* e em várias minas brasileiras essa terminologia é aplicada. Na Figura 2.11 mostram-se a *capa* e a *lapa* de um corpo tabular, além de outras particularidades relacionadas à exploração. O acesso ao corpo de minério é feito a partir de um poço. No caso da Figura 2.11, devido à topografia aplainada, o único modo prático de acesso (sem contar com sondagens) é através de um poço, que pode ser posicionado na *capa* ou na *lapa* do corpo. Do poço partem galerias transversais ao corpo (travessas) e galerias paralelas à direção (cabeceiras), na *capa* ou na *lapa*, são abertas. A partir das travessas e das cabeceiras podem ser feitas subidas e descidas. Realces são abertos a partir das galerias.

Quando se tem um depósito tabular não horizontal, a visualização do mesmo é realizada projetando-se o depósito em uma ou mais seções longitudinais verticais. O depósito projetado é subdividido em blocos menores. Cada bloco é limitado por níveis equidistantes e por seções estruturais transversais, também equidistantes umas das outras. Assim, constroem-se blocos retangulares, por exemplo, com 25 a 50 metros (verticalmente) e 50 a 100 metros (horizontalmente). Cada bloco representa a projeção de uma parcela do depósito, com comprimento ao longo do mergulho igual a $e/\sin \alpha$ (e corresponde ao espaçamento entre níveis e α é o mergulho do corpo). Os blocos podem ser segmentados em painéis. Os serviços de exploração devem ser representados pelos seus traços.

A Figura 2.12 mostra uma seção geológica construída com dados de sondagem; o corpo de minério é assinalado. A seção tem os traços dos furos de sonda projetados na

mesma, os níveis topográficos, as coordenadas de posicionamento da seção, número e orientação da seção, posição de galerias, corpo de minério e interpretação do falhamento. Um mapa mostra o posicionamento da seção.

Na Figura 2.13 representa-se um mapa de contorno estrutural da base de um corpo de minério atravessada por furos de sonda e truncado por uma falha, também mostrado por contornos estruturais. O traço do corpo, interrompido pela falha, é assinalado (nos pontos onde os contornos da base do corpo têm as mesmas cotas que a superfície da falha). Esse tipo de mapa pode ser usado para representar contatos, de qualquer natureza. No caso específico da Figura 2.13 a separação originada pelo falhamento pode ser determinada.

Projeções estereográfica e isométrica

A projeção estereográfica pode ser muito útil na representação de estruturas planares e lineares presentes nos depósitos minerais. Por exemplo: com medidas de mergulho do contato entre o corpo de minério e a encaixante, realizadas em diferentes planos (em galerias e travessas próximas) calcula-se o mergulho verdadeiro. Os planos podem ser as paredes das escavações; o traço do mergulho (portanto, uma linha) é medido nesses planos, em locais adjacentes, registrado na projeção e em seguida adapta-se um plano aos pólos e se faz a leitura da direção e do mergulho reais.

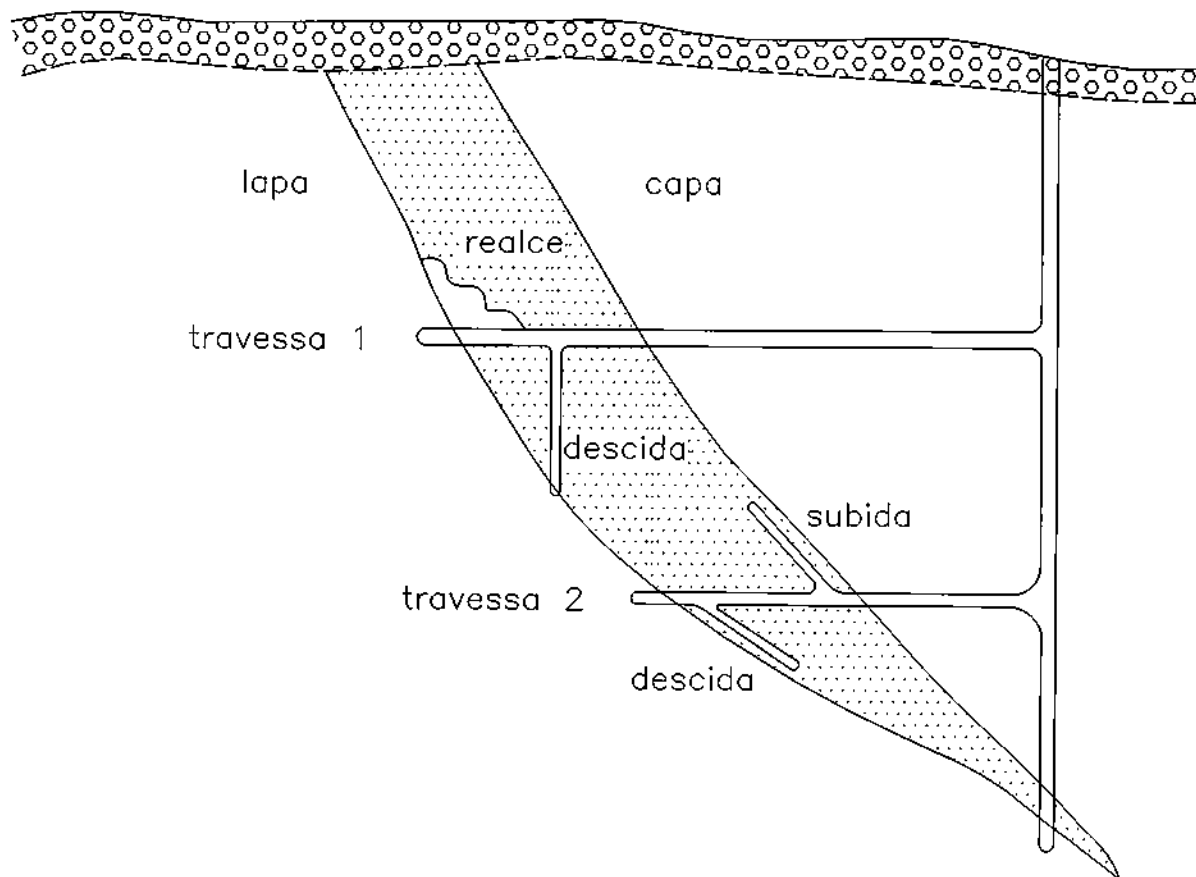


Fig. 2.11 Capa e lapa de um corpo tabular; poço, galeria e subida e descida.

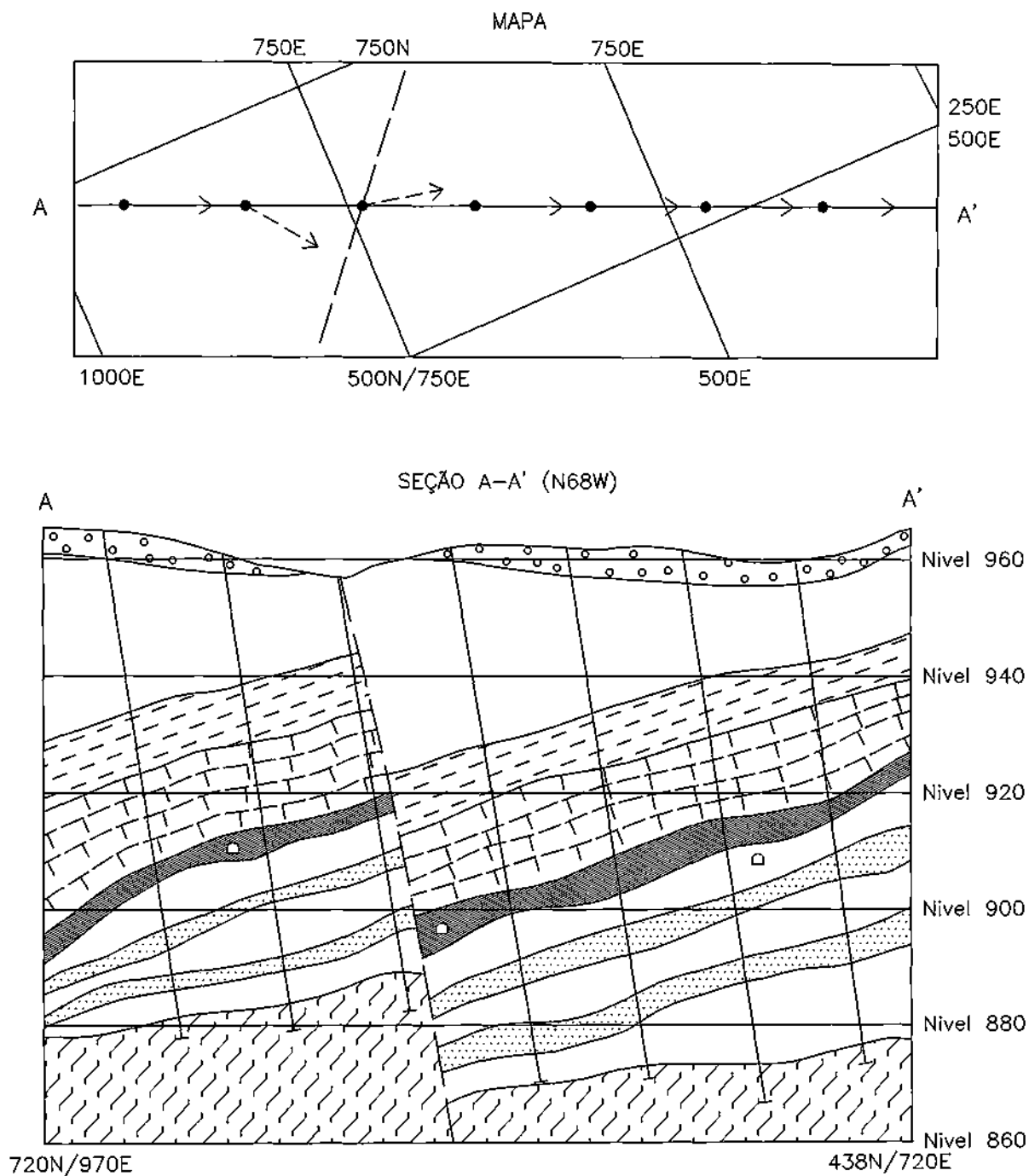


Fig. 2.12 Seção geológica passando por corpo de minério falhado (cinza).

Outra aplicação prática da projeção: um corpo de minério mostra-se dobrado e há forte tendência da mineralização se concentrar na zona axial da dobra; um número significativo de medidas de direção e mergulho é realizado e registrado em projeção estereográfica, visando calcular o rumo e caimento do eixo da dobra, de modo a estimar em diferentes níveis, o posicionamento do mesmo.

Há um amplo número de aplicações da projeção estereográfica na exploração mineral. Na Figura 2.14 são mostrados exemplos.

Na Figura 2.14A registra-se um plano contendo uma linha. A atitude da uma linha contida em um dado plano

é especificada pelo ângulo e sentido do *pitch* no plano (*pitch* é o ângulo entre a linha e a direção do plano que a contém). Seja o plano P igual a N25°W/30°W. O *pitch* da linha L em P é 53°SW. Gira-se P até coincidir com o pólo norte da rede de registro. Registrar L = 53° a partir do pólo sul da rede, sobre o grande círculo de P.

Na Figura 2.14B mostra-se como encontrar um plano que contém duas linhas (por exemplo dois traços do mergulho em duas juntas que se cruzam). A primeira linha L_1 tem rumo S78°W e caimento de 40° e a segunda L_2 = N42°E/62°. Como quaisquer duas linhas não paralelas situam-se em apenas um plano, existe apenas um grande círculo que passa por L_1 e L_2 . Gira-se o *overlay* até L_1 e L_2

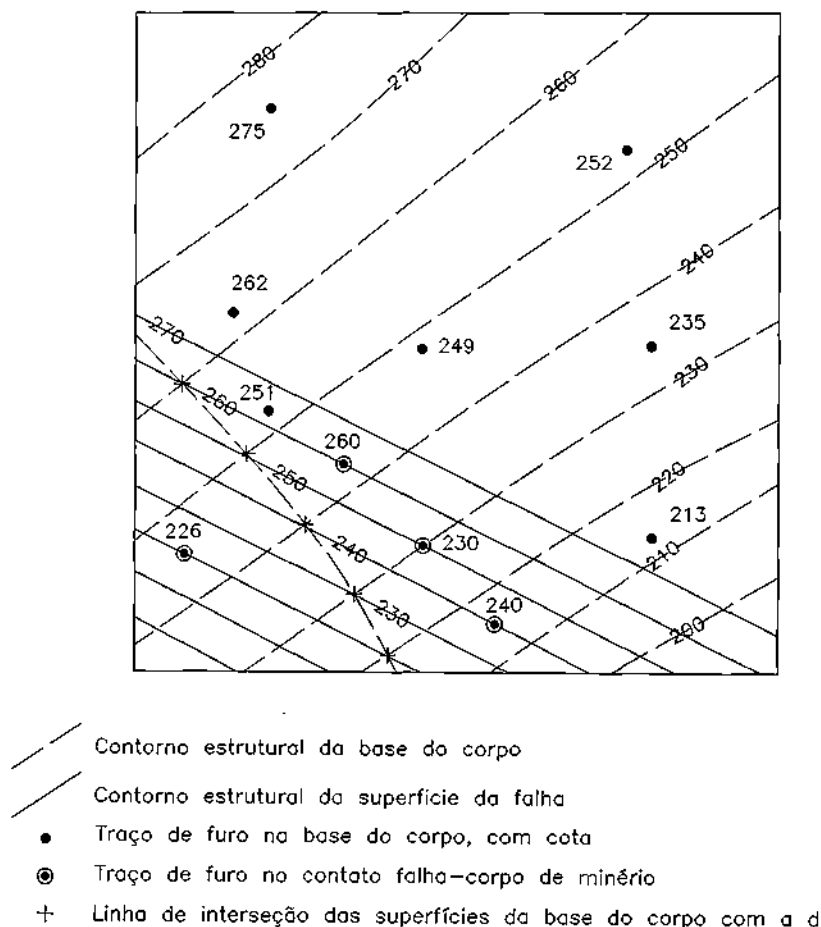


Fig. 2.13 Contornos estruturais da base de um corpo de minério, falhado

situarem-se em um grande círculo P. Sua direção é N67E e o mergulho 77°N.

Na Figura 2.14C mostra-se o procedimento para determinar a linha de interseção de dois planos. P_1 correspondente a N25W/30W e P_2 , N55°E/48SE. A linha de interseção é a única linha que pode conter os dois planos. A projeção L (S32°W/16°) é o ponto de interseção

dos traços de P_1 e P_2 . O pólo P_3 é o pólo do plano P_3 que contém P_1 e P_2 .

A projeção isométrica pode ser usada com grande proveito na visualização do comportamento de um corpo de minério em diferentes níveis topográficos. Na Figura 2.15 mostra-se um exemplo.

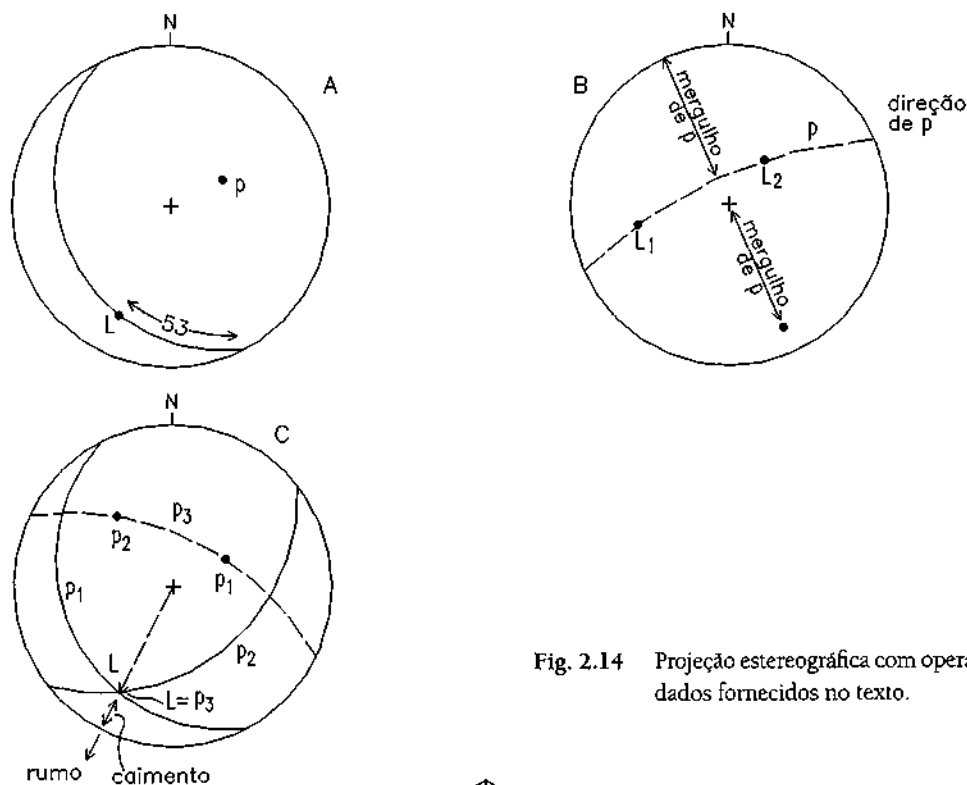


Fig. 2.14 Projeção estereográfica com operações geométricas, dados fornecidos no texto.

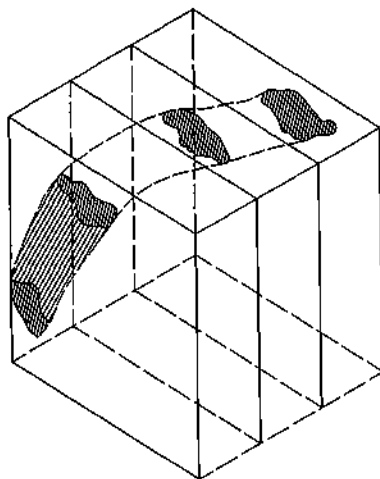


Fig. 2.15 Projeção isométrica de um corpo de minério

Diagramas direcionais

Os diagramas direcionais são diagramas que combinam frequências e azimutes da propriedade sob exame. Podem ser representados rumos de juntas verticais, de falhas, de zonas cisalhadas, de paleocorrentes, de estratificação cruzada, etc.

Um dos diagramas mais utilizados é chamado *rose diagram* e é preparado do modo seguinte:

1) Determina-se um número significativo de medidas da estrutura que se quer representar e se divide o total por intervalos determinados (por exemplo, 10 graus, de modo que a circunferência de círculo é subdividida em 36 intervalos);

2) A frequência para cada intervalo é calculada;

3) Constrói-se um círculo com raio igual ao da máxima frequência e representam-se os intervalos de cada classe, com tamanho correspondente à frequência;

4) Divide-se cada intervalo ao meio e marca-se o ponto médio, entre o centro do círculo e a frequência da ocorrência. Conectam-se os pontos e o diagrama está completado.

3. Cálculos para a determinação dos parâmetros dos corpos minerais

No estabelecimento dos recursos e reservas de um depósito mineral é necessário delinear o mesmo. Para tal os parâmetros básicos incluem a **espessura** e a **área**, que são os indicadores quantitativos da forma, tamanho e volume do depósito, o **teor**, que é indicativo dos conteúdos e de sua distribuição e o fator **peso**, indicador para o cálculo da tonelagem.

A tonelagem é definida pela expressão $T = V.d$, onde V é o volume e d o fator densidade (adimensional, por definição).

Define-se **densidade** como o número de vezes que um corpo de qualquer volume é mais pesado que um igual volume de água. **Peso específico** é a massa por unidade de volume (g/cm^3).

A tonelagem, ao contrário do volume, não é uma questão apenas geométrica. Ao contrário do teor o volume não é uma variável regionalizada (VR). Uma variável é regionalizada quando o valor de um ponto no interior do depósito tem magnitude dependente de sua posição (a 3D) e do seu suporte (ou, simplisticamente, "tamanho").

Delineação, interpolação, e extrapolação

Delinear um depósito mineral é fixar limites para o mesmo. A questão envolve a utilização dos conceitos de interpolação e extrapolação. Em raras oportunidades é possível realizar delimitação direta.

Interpolar é determinar o valor de um atributo em um

ponto interno de um intervalo a partir dos valores deste atributo nas fronteiras do intervalo considerado. **Extrapolar** é determinar, por inferência, o valor de um atributo fora de um intervalo, utilizando seu comportamento dentro desse intervalo. A extrapolação pode ser **limitada** (o atributo é estabelecido entre um ponto onde ele é determinado e um ponto além, onde ele não existe, comprovadamente; por exemplo, extrapola-se de modo limitado entre um furo positivo e um furo negativo) ou **ilimitada** (o atributo é determinado além de um ponto onde é conhecido e outro, situado fora, onde, por inferência, ele não existe).

O limite de um depósito pode ser estabelecido através de considerações **geológicas** (por exemplo, espessura zero, acunhamento, contato entre matéria mineral de interesse econômico e estéril, etc.), **geométricas** (usando interpolação para determinar, por exemplo, a espessura considerada econômica ou lavrável ou ainda, usando extrapolação) ou **econômicas** (por exemplo, relação estéril/minério, teor de corte, etc.).

Como base para representar os limites de um depósito, utilizam-se mapas topográfico-geológicos e seções geológicas horizontais e verticais.

A utilização de mapas topográficos para a delimitação nem sempre é possível, pois, raramente, tem-se contato exposto de modo contínuo, entre material mineralizado e material estéril. Poucos são os depósitos delimitáveis na superfície do terreno, acompanhando-se o contato. Em certos casos isto é possível, quando há diferença de dureza entre a rocha encaixante e a mineralização e uma delas aparece em realce.

Exemplos salientes das situações mencionadas podem ser apreciados nos mapas geológicos de detalhe, elaborados pelos geólogos do DNPM – Departamento Nacional da Produção Mineral e do *United States Geological Survey* – USGS, que trabalharam nos jazimentos de minério de ferro da Província do Quadrilátero Ferrífero, MG, distritos de Itabira, Congonhas e Pico do Itabirito, dentre outros. Os corpos de hematita dura - semidura aparecem claramente representados, com contatos observados com canga e, por vezes, com itabirito. Como parte do minério hematítico tem elevada dureza, destaca-se na topografia. Uma das jazidas foi levantada por Guild (1957) e o documento produzido denomina-se *Geologic Map and Sections of the Casa de Pedra Iron Deposit, Congonhas District, Minas Gerais, Brazil (Plate 6)*.

A delimitação que se faz nos mapas de superfície não é completa, pois falta a delimitação em subsuperfície, representada em seções horizontais e/ou verticais. Algumas situações de delimitação em seções são mencionadas a seguir.

Delimitação projetando-se dados de sondagem em um plano de referência, horizontal

Na Figura 3.1 mostra-se no diagrama A a rede de furos de sonda (verticais, no caso) e representa-se, através de isolinhas, a espessura (isólitais) do estéril de cobertura; no diagrama B tem-se as isólitais do material mineralizado; no diagrama C tem-se o mapa da relação estéril-minério e no diagrama D, tem-se as isolinhas de teor do mesmo. As curvas mostradas nos diagramas foram obtidas por interpolação dos valores das propriedades sob exame, entre furos sucessivos (ver adiante).

Os critérios para delimitação, no caso do depósito representado na Figura 3.1 são: 1) relação estéril de cobertura / mineralização (R_{em}) máxima igual a 1 m / 1 m e, 2) teor mínimo de 10% (teor de um dado elemento ou

de um óxido). Se, por exemplo, a mineralização é fosfática, o teor refere-se ao conteúdo de P_2O_5 .

Superpondo-se os mapas dos diagramas A e B, nos pontos onde as isólitais do diagrama A interceptarem as isólitais do diagrama B, marcam-se as relações estéril de cobertura / mineralização. Obtemos, então, uma série de pontos com valores dessa relação. Unindo-se os pontos de igual relação, obtemos um novo mapa, que é o diagrama C da Figura 3.1.

Transfere-se, em seguida, a linha de R_{em} igual a 1 (um) para o diagrama D. Com a premissa do teor levada em consideração, tem-se em pontilhado, nesse diagrama, o limite do corpo mineralizado. Em prosseguimento, determinam-se área e volume do mesmo, conforme se verá adiante.

Delimitação com construção de seções geológicas e seu rebatimento em planos vertical e horizontal

O processo é aplicado a um setor individual ou a todo o depósito. Na Figura 3.2 mostram-se duas seções geológicas paralelas AA' e BB' construídas a partir de dados obtidos em duas galerias posicionadas em dois níveis diferentes. As projeções em um plano longitudinal vertical e em um plano horizontal são mostradas na Figura 3.2, onde as áreas pontilhadas representam a delimitação do setor sob exame.

Delimitação utilizando observação direta do contato

É o caso de contato brusco, entre o depósito e sua encaixante. Registra-se em seções verticais ou horizontais o contato. Se for transicional, a amostragem fornecerá dados de teor; se é adotado um certo teor de corte, assinala-se o limite, representado nas seções.

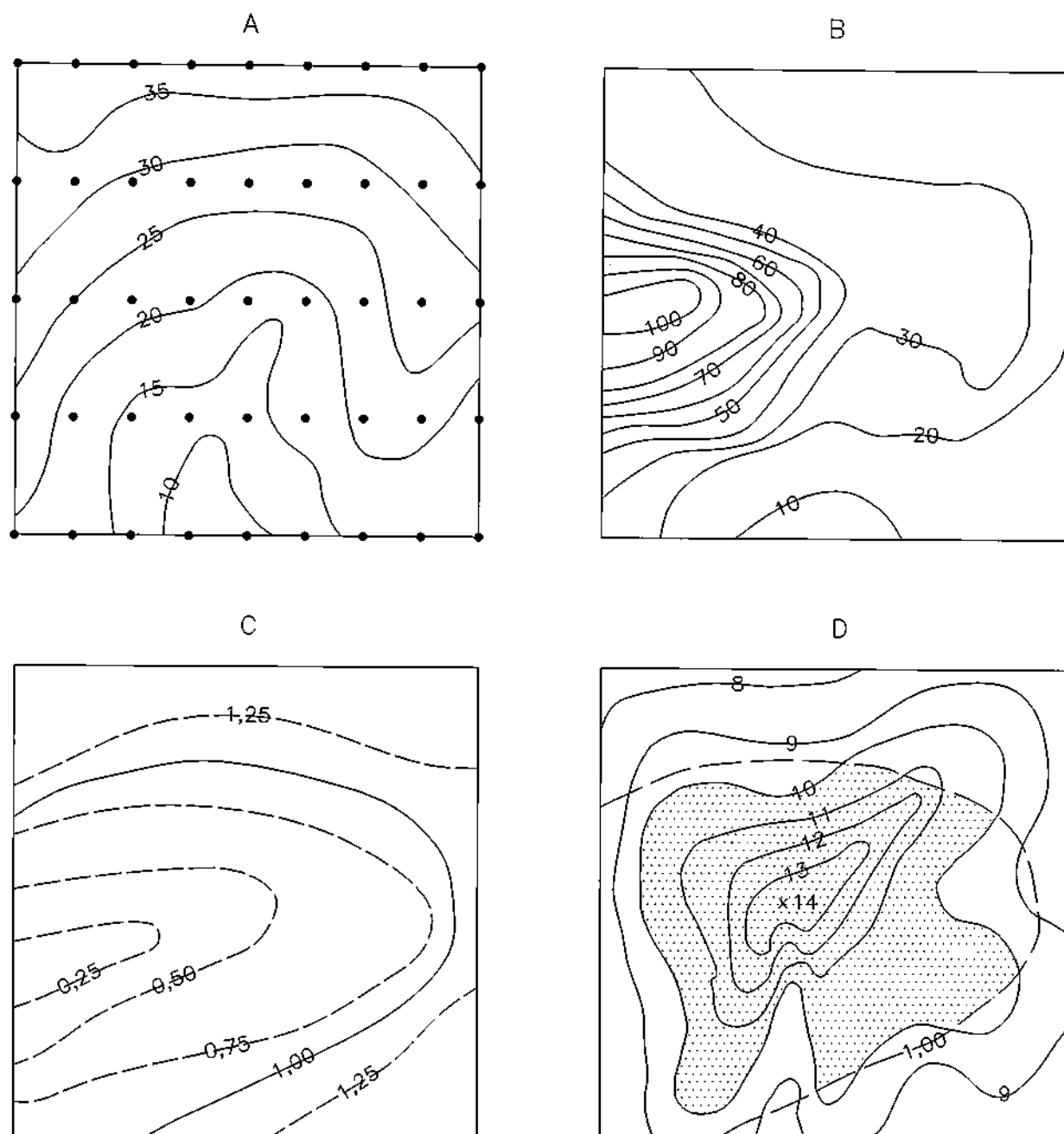


Fig. 3.1 Delimitação de um depósito mineral utilizando como premissas a relação estéril de cobertura/material mineralizado (limite 1m/1m) e o teor de corte (teor mínimo de 10%). Em A, mapa de isolinhas de espessura do estéril; em B, mapa de isolinhas de espessura do material mineralizado; em C, mapa da relação estéril/material mineralizado. Em D mostram-se isolinhas de teor. O corpo mineralizado está assinalado em pontilhado, limitado pela isolinhas de teor (10%) e pela relação estéril/material mineralizado (1m/1m ou 1,0).

Delimitação em uma galeria projetada em um plano horizontal

Na Figura 3.3 tem-se o mapa de um corpo mineralizado, em uma galeria, com travessas. Os contatos de capa e lapa do corpo com a encaixante são diretamente marcados. Como há mineralização rica, intermediária e pobre, foram abertos canais com os seguintes resultados: canais 1 e 2, material rico; canais 3 e 5, material pobre; canal 4, material intermediário. Através de interpolação são delimitados material rico para pobre (canais 2 e 3), material pobre para intermediário (canais 3 e 4), material intermediário para pobre (canais 4 e 5); por extrapolação, assinala-se o limite do corpo, além do canal 5.

Delimitação de um corpo mineralizado através de extrapolação

Utilizam-se seções verticais transversais e longitudinal (Figura 3.4). As seções transversais têm porções interpoladas (entre serviços positivos) e extrapoladas. Em todas elas adotou-se um modelo de acunhamento. Uma seção mostra extrapolação limitada (entre os dois furos) e as outras duas, extrapolação ilimitada. Uma seção transversal apresenta a subdivisão das porções interpoladas e extrapoladas.

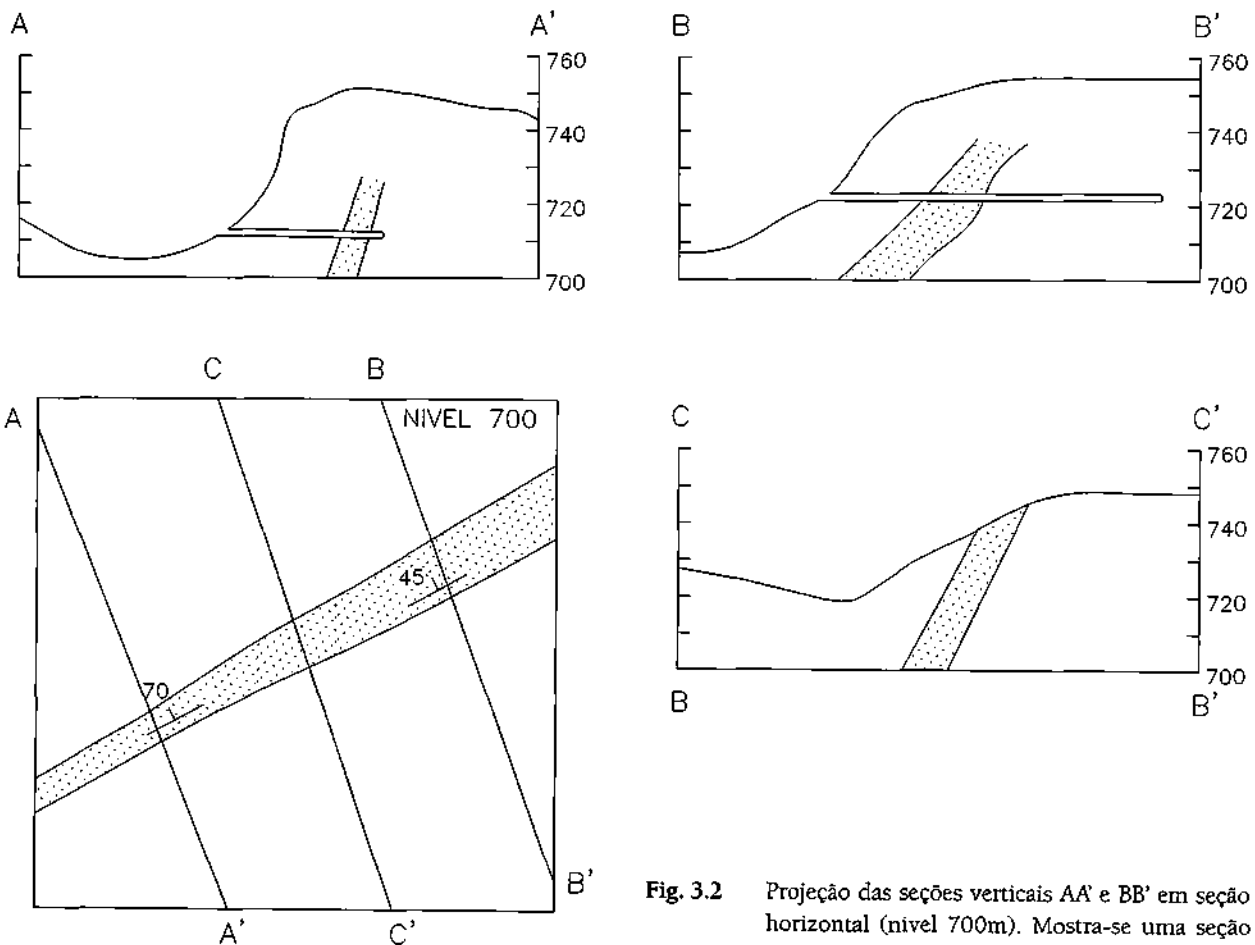


Fig. 3.2 Projeção das seções verticais AA' e BB' em seção horizontal (nível 700m). Mostra-se uma seção vertical construída entre a seção AA' e seção CC'.

3. Cálculos para a determinação dos parâmetros dos corpos minerais

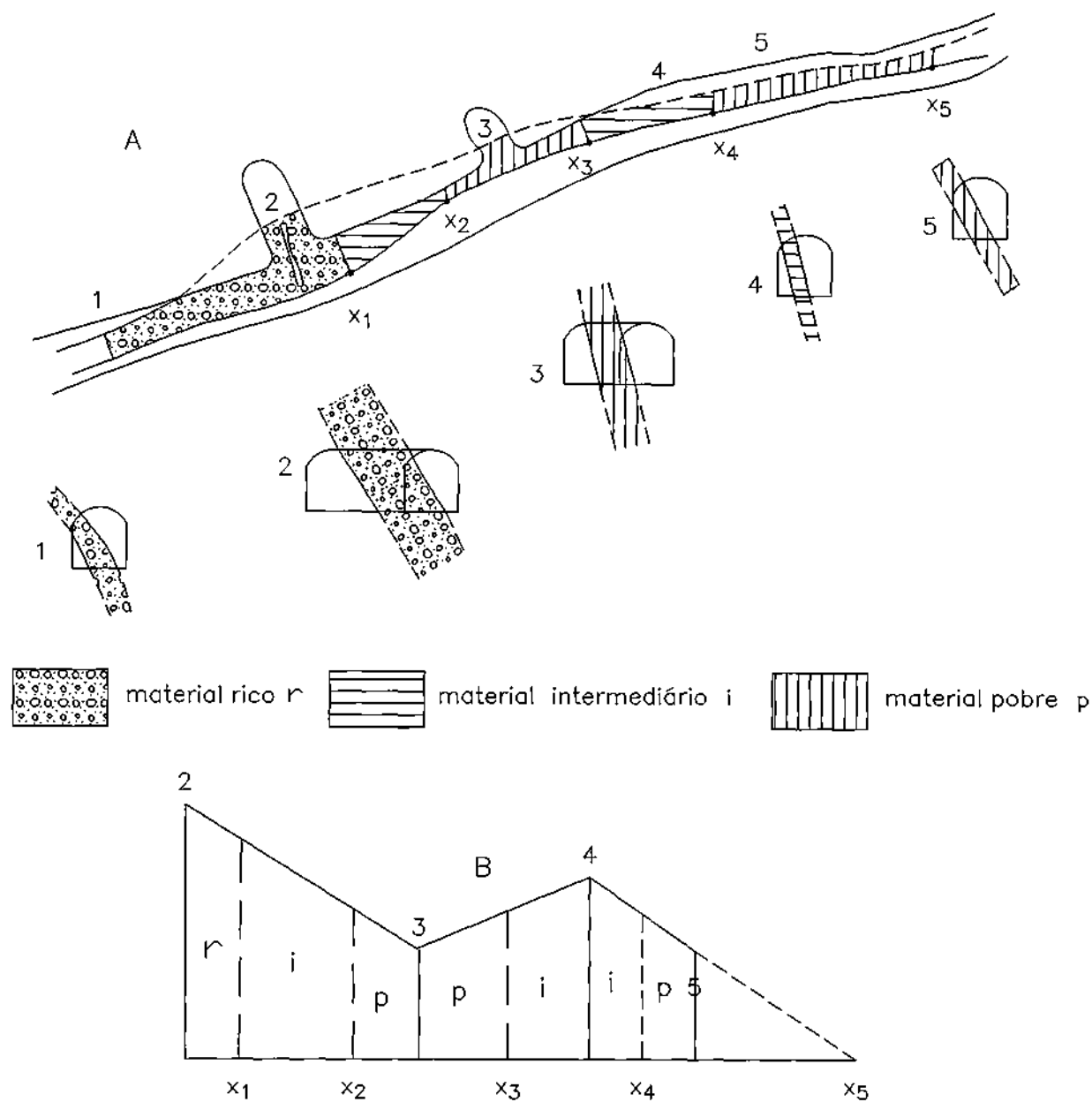


Fig. 3.3 Delimitações de um corpo em uma galeria, por observação direta (traço contínuo) e por interpolação (linha tracejada), mostrando-se seções passando pelos canais (A). Em B mostra-se a delimitação das porções com diferente conteúdo. r = material rico; p = material pobre, i = material intermediário.

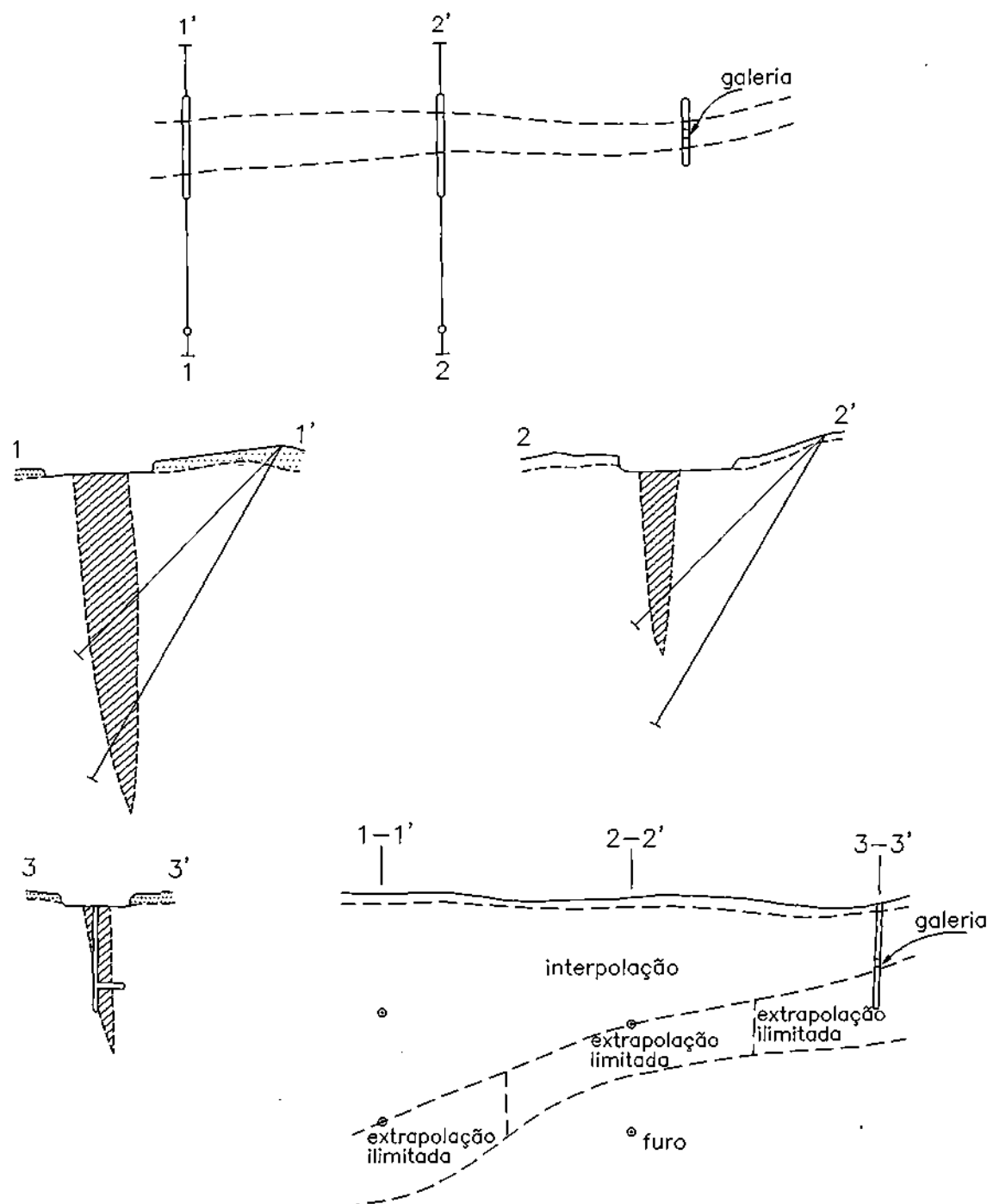


Fig. 3.4 Delineação de um corpo em seção vertical, a partir de trincheiras e furos de sonda (seções 1-1' e 2-2') e de trincheira, poço e galeria (seção 3-3'). Em 1-1' foram usadas interpolação e extrapolação ilimitada; em 2-2', interpolação e extrapolação limitada e em 3-3', interpolação e extrapolação ilimitadas. A seção longitudinal mostra porções com interpolação e extrapolação.

Delimitação completa do depósito, explorado por retículo regular de serviços

Os pontos que limitam o depósito são transferidos para um plano horizontal (ou planos horizontais de igual espaçamento). Inicialmente assinala-se o **limite interno**, através da união de trabalhos exploratórios (por exemplo, furos de sonda) positivos. O **limite externo**, de espessura zero, é construído usando extrapolação limitada, de um dos modos seguinte:

- O limite passa pelo ponto médio entre serviços positivos e negativos;
- O limite é tirado das seções verticais, adotando-se o modelo de acunhamento;
- O limite é definido usando uma construção geométrica, chamada ângulo médio de acunhamento. O ângulo médio é a relação entre a meia espessura média dos trabalhos exploratórios marginais (positivos) e o meio espaçamento médio dos mesmos, ou seja, a espessura é igual a

$$E = \sum_{i=1}^N E_i / N \text{ e o espaçamento } L = \sum_{i=1}^N e_i / N.$$

$$\text{O ângulo médio é } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = (E/2) / (e/2) = \frac{E}{e}$$

Na Figura 3.5 ilustram-se as situações (a) e (c) acima mencionadas. Em cada furo positivo tem-se a espessura do depósito P_i ; conhecido $\operatorname{tg} \alpha/2$, os pontos que limitam externamente o mesmo, entre furos positivos e negativos estão posicionados a uma distância $D_i = P_i \cdot 2 \operatorname{tg} \alpha/2$

- Quando não há serviços negativos além do limite interno do depósito, o limite externo pode ser construído por extrapolação, marcando-se pontos a uma distância igual ao meio espaçamento entre serviços positivos. Uma segunda opção é construir isolinhas interpoladas dentro do limite interno; em seguida extrapolar-se isolinhas com espaçamento igual, assinalando, então, o limite de espessura zero (Figura 3.6).

Observe-se que a delimitação tem precisão decrescente, da traçagem contínua do contato, passando pela interpolação e pela extrapolação. A precisão é função do cuidado que se deve ter na construção das seções representando o depósito e a encaixante.

Determinação da espessura

O volume de uma dada forma é obtida pelo produto entre a área ocupada pela mesma e a espessura. Examinemos a questão da determinação da espessura, com base nas relações geométricas entre o corpo mineral e os serviços exploratórios.

A informação desejada pode ser obtida diretamente de medidas executadas em obras de pesquisa. As medidas podem, também, ser realizadas em mapas e seções geológicas.

Procedimentos trigonométricos oferecem resultados precisos. O objetivo, no caso, é calcular a espessura verdadeira, a partir da espessura aparente. Casos comuns são examinados a seguir:

Seja dado o corpo tabular da Figura 3.7 onde se tem representação em planta, em seção vertical perpendicular à direção do corpo e em seção oblíqua à direção. As relações entre as diversas espessuras são mostradas na própria figura, através de expressões trigonométricas.

Consideremos agora uma situação comum em exploração mineral: um furo de sondagem, vertical ou inclinado, atravessa o corpo mineral, atingindo sua capa a uma profundidade D_v ou D_i (furo vertical ou inclinado, respectivamente), conforme mostrado na Figura 3.8. No caso do furo vertical, tem-se D_v igual à distância medida na vertical (ao longo do furo), entre a superfície e a capa do corpo e podemos escrever:

$$D_h = (e_r / \operatorname{sen} \alpha) + D_v \cdot \cot \alpha$$

$$e_r = \{D_h - (D_v \cdot \cot \alpha)\} \operatorname{sen} \alpha$$

Para a situação envolvendo o furo inclinado temos:

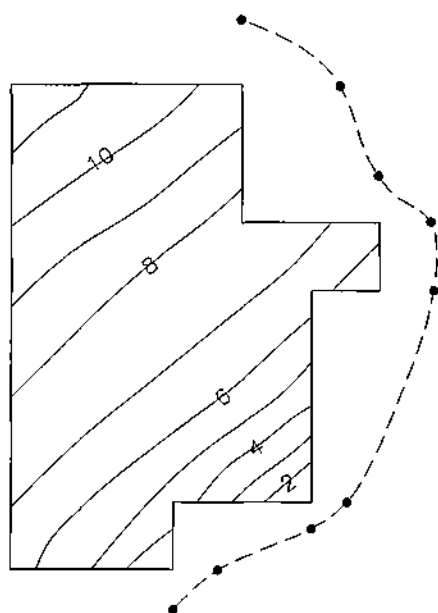
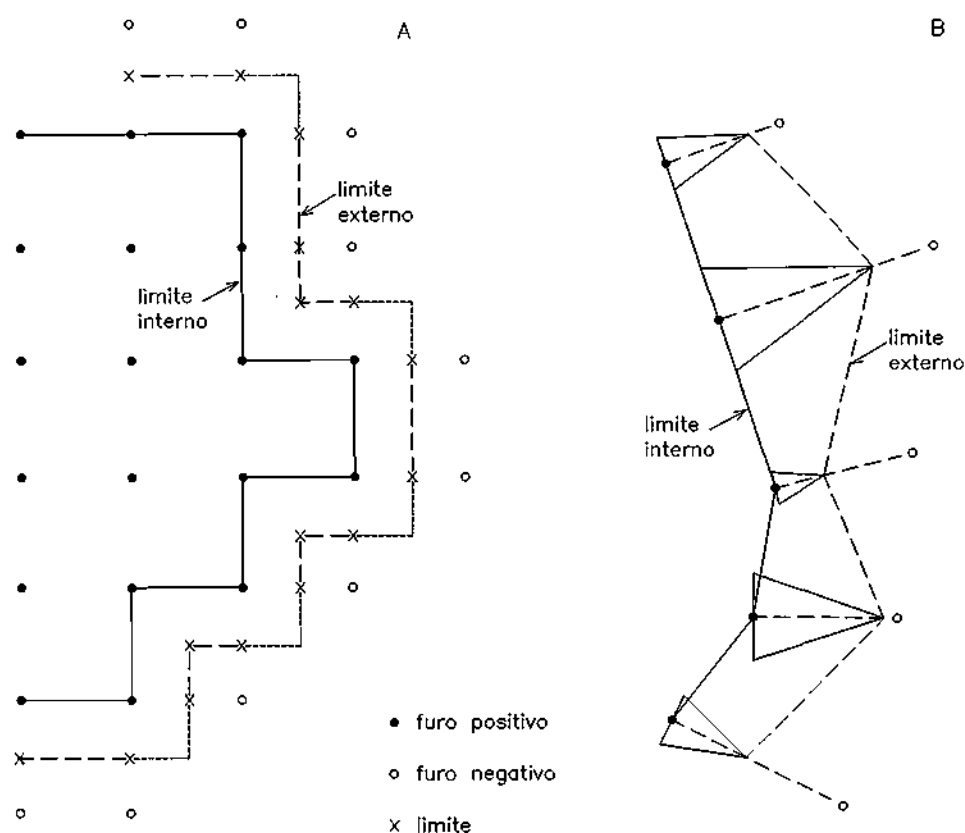


Fig. 3.6 Delimitação por extrapolação ilimitada usando espaçamento das isolinhas

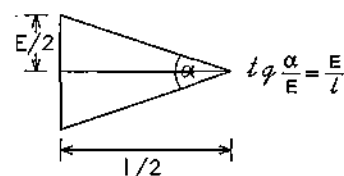


Fig. 3.5 Construção dos limites interno e externo de um depósito. Em A mostra-se a construção pelo ponto médio; usando extrapolação limitada e ilimitada; em B, mostra-se a construção usando o ângulo médio. Neste caso, observar que chamando de P_i a espessura em dado furo positivo e D a distância a usar na construção (entre furos positivo e negativo), tem-se $\tan \frac{\alpha}{2} = (P_i/2)/D$ e $D = \tan \frac{\alpha}{2} \cdot l/2$.

$$\begin{cases} D_v = d_i \cdot \sin \delta \\ D_h = (e_r / \sin \alpha) = D (\cot \alpha + \cot \delta) \end{cases}$$

$$e_r = \{ D_h - (D_v \cdot \cot \alpha + \cot \delta) \} \sin \alpha$$

Uma outra situação ocorre quando a espessura é medida em superfície topográfica inclinada no mesmo sentido que o mergulho ou, então, em sentido oposto. Na Figura 3.9 as duas situações são ilustradas. Quando a seção de observação da espessura não é normal à direção geológica do corpo mineral e o terreno é inclinado, a espessura verdadeira é calculada conforme a Figura 3.7.

Determinação da área

A determinação da área é feita a partir de mapas e seções. Pode-se empregar planímetro (duas leituras em direções opostas; se a diferença for menor que 2%, aceita-se a média como correta) ou um sistema computacional. Outros métodos são apresentados a seguir:

a) Um método simples de obter a área é utilizar **cálculo geométrico**. Divide-se a área em sub-áreas de forma simples, como triângulos, retângulos, etc. Dadas as dimensões da malha a área total pode ser calculada pela somatória das áreas menores.

b) A área de um triângulo pode ser facilmente calculada quando se tem as coordenadas das vértices A ($x_1 y_1$), B ($x_2 y_2$) e C ($x_3 y_3$), conforme Figura 3.10. A área do triângulo é $S = 1/2 BC \cdot h$, onde BC é a distância entre os vértices B e C e h a altura do triângulo.

$$BC = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}$$

A equação da reta que passa por B e C é:

$$\frac{y - y_2}{y_2 - y_3} = \frac{x - x_2}{x_2 - x_3} \quad \text{ou}$$

$$(y_2 - y_3)(x - x_2) - (x_2 - x_3)(y - y_2) = 0$$

A equação de uma reta tem a forma $Ax + By + C = 0$. A distância h (altura do triângulo) é:

$$h = \frac{(Ax_1 + By_1 + C)}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|(y_2 - y_3)(x_1 - x_2) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_2)|}{\sqrt{(y_2 - y_3)^2 + (x_2 - x_3)^2}}$$

Substituindo os valores de BC (a distância BC corresponde ao denominador da expressão que define h) e h na equação da área do triângulo tem-se:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} BC \cdot h = \\ &= \frac{1}{2} |(y_2 - y_3)(x_1 - x_2) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_2)| \end{aligned}$$

$$S = \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$$

A fórmula é fácil de memorizar, bastando permutar os índices das letras: 1-2-3, 2-3-1 e 3-1-2.

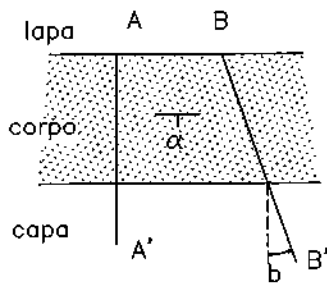
c) Uma forma elegante de expressar a área de um triângulo é utilizar um determinante; seja D o **determinante** de forma:

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

A área do triângulo é, portanto, $S = 1/2 |D|$. A ordem das fileiras é $x_1 y_1 1$; a ordem das colunas corresponde à ordem dos vértices A, B e C.

d) Uma generalização para cálculo de área, quando temos as coordenadas dos vértices do polígono que representa a superfície do depósito, é oferecida pela utilização da **fórmula de Gauss** (que pode ser facilmente deduzida), conforme Figura 3.11:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} [x_1(y_n - y_2) + x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_2 - y_4) + \dots \\ &\quad + x_n(y_{n-1} - y_n)] \end{aligned}$$

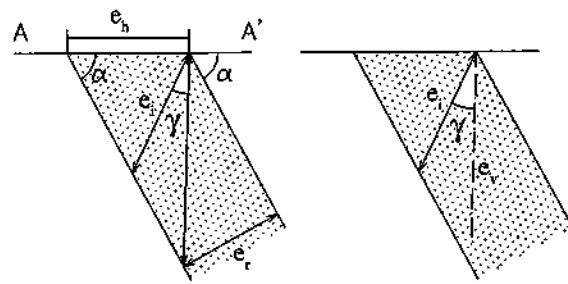


$$e_r = e_h \cdot \sin \alpha = e_v \cdot \cos \alpha$$

$$e_v = \frac{e_i \cdot \cos(\alpha - \gamma)}{\sin \alpha}$$

$$e_r = \frac{e_i \cdot \cos(\alpha - \gamma)}{\cos \alpha}$$

$$e_r = e_i \cdot \cos \alpha$$

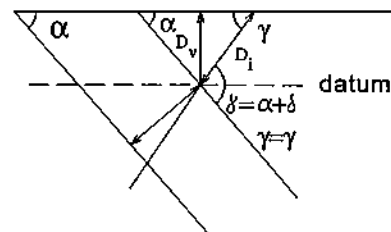
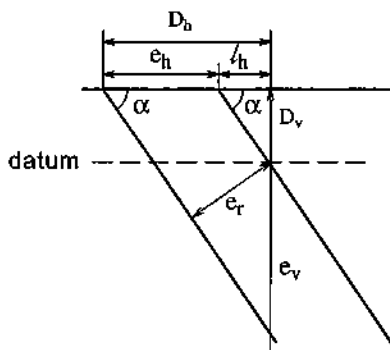


$$e_h = e_v / \tan \alpha$$

$$e_r = e_i \cdot \cos(\alpha - \gamma)$$

$$e_v = e_h \cdot \tan \alpha$$

Fig. 3.7 Relações entre as espessuras dos corpos minerais. α é o mergulho do corpo, β é o ângulo entre a direção da seção obliqua e a direção do corpo, γ é o desvio da espessura inclinada em relação a linha vertical, e_r , e_h , e_v e e_i são as espessuras real, horizontal, vertical e inclinada, respectivamente.



$$e_v = e_h \cdot \tan \alpha$$

Fig. 3.8 Corpo tabular, atravessado em seção normal à direção, por furo de sonda vertical (esquerdo) ou inclinado (direita). D_h é a distância horizontal entre a projeção do ponto atingido, na capa do corpo, pelo furo até o ponto de interseção da lapa e o plano horizontal, em seção vertical. D_v e D_i são as distâncias vertical e inclinada, da superfície até o ponto onde o furo toca a capa do corpo. δ é a inclinação do furo. Outros parâmetros como na Fig. 2.7.

$$S = \frac{1}{2} [y_1(x_n - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_4) + \dots + y_n(x_{n-1} - x_n)]$$

e) Para a **avaliação das áreas extrapolygonais** (Figura 3.12) medem-se as abscissas e as ordenadas nos pontos em que a curva muda sensivelmente de direção; as porções de curva entre duas ordenadas consecutivas são consideradas como retas. Assim a figura a medir é decomposta em trapézios desiguais e sua área é igual a:

$$S = \frac{1}{2} [x_1(y_0 - y_1) + x_2(y_1 - y_2) + x_3(y_2 - y_3) + \dots + x_n(y_{n-1} - y_n)]$$

f) O cálculo de uma área irregular pela **fórmula de Simpson** (Figura 3.13) é baseado na hipótese que os limites curvos de cada faixa são parábolas que passam através de pontos consecutivos. Se o número de linhas é ímpar e o número de faixas é par, a área é computada pela fórmula:

$$S = \frac{1}{3} \times [y_0 + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + y_n] =$$

$$S = \frac{1}{3} \times [(y_0 + y_n) + 4 \sum y_{\text{ímpar}} + 2 \sum y_{\text{par}}]$$

g) **Regra trapezoidal.** A área irregular é dividida em um número par de figuras trapezoidais, por meio de linhas eqüidistantes e paralelas. Supondo que os limites das faixas sejam linhas retas, a área da figura é:

$$S = \frac{a_1 + a_2}{2} h + \frac{a_2 + a_3}{2} h + \frac{a_{n-1} + a_n}{2} h = h \left(\frac{a_1 + a_2}{2} + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} \right)$$

h) O **cálculo numérico de integrais** oferece um método prático de medição de áreas de contorno fechado. A área – isto é o intervalo de integração (a, b) – é dividida por travessas em n partes iguais (Figura 3.14) cada uma com comprimento igual a:

$$h = b - a / n$$

Considerando $a = x_0$, $b = x_n$ e $x_{1/2}$, $x_{3/2}$, $x_{5/2}$... com pontos médios dos subintervalos (x_0, x_1) , (x_1, x_2) , (x_2, x_3) ... podemos escrever:

$$f(x_0) = y_0, \quad f(x_1) = (y_1), \quad f(x_2) = (y_2)$$

$$f(x_{1/2}) = y_{1/2}, \quad f(x_{3/2}) = (y_{3/2}), \quad f(x_{5/2}) = y_{5/2}$$

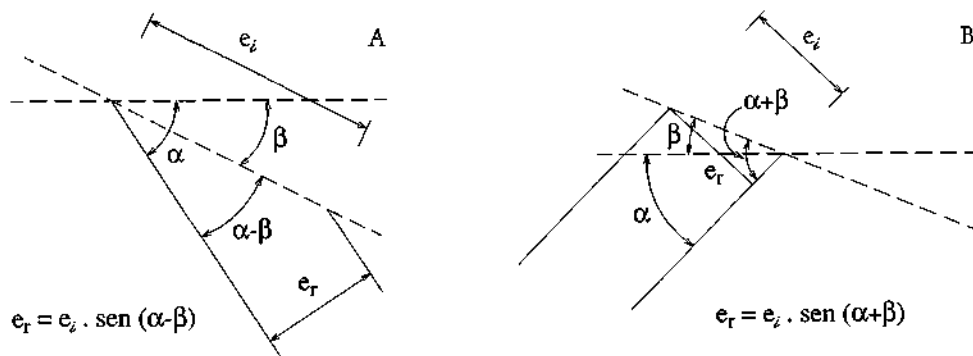


Fig. 3.9 Corpo tabular, com seção normal à direção e com espessura medida em superfície topográfica inclinada no mesmo sentido do mergulho (diagrama A) ou no sentido oposto (diagrama B).

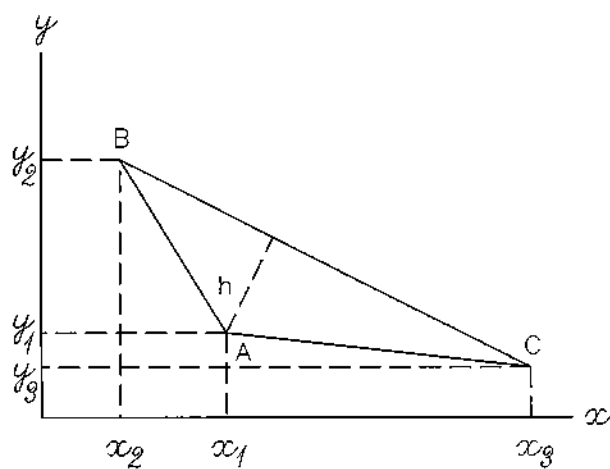


Fig. 3.10 Esquema para cálculo da área de um triângulo usando-se coordenadas dos vértices.

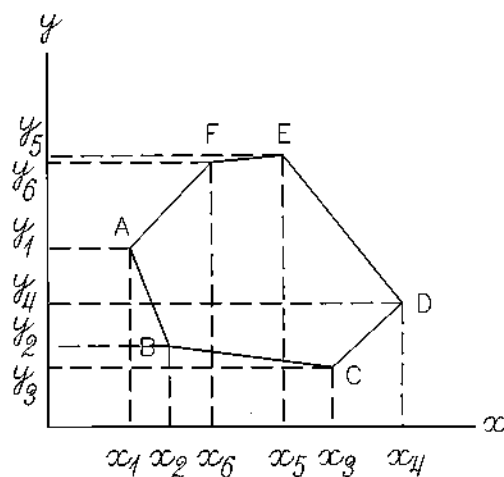


Fig. 3.11 Cálculo de área pelo método de Gauss.

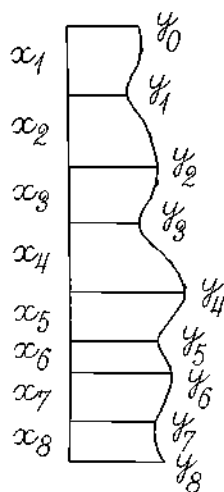


Fig. 3.12 Medida de área extrapolygonal.

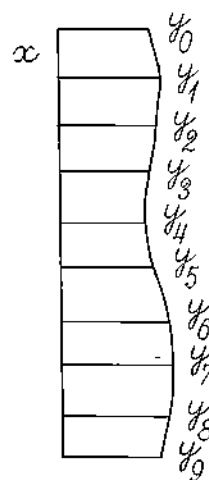


Fig. 3.13 Método de Simpson.

As fórmulas para as áreas da Figura 14 (A, B e C) correspondem às igualdades aproximadas:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} [y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}]$$

(diagrama A)

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} [y_1 + y_2 + \dots + y_n]$$

(diagrama B)

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} [y_{1/2} + y_{3/2} + \dots + y_{2n-1/2}]$$

(diagrama C)

A terceira fórmula é mais acurada que as outras duas. O erro na terceira fórmula corresponde a

$$\left[\frac{(b-a)^2}{24n^2} \right] M_2, \text{ onde } M_2 \text{ é o maior}$$

valor de $|f''(x)|$ no intervalo (a, b).

A integral apresentada a seguir

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left[\frac{y_0 - y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right]$$

é a fórmula trapezoidal, que fornece a área total dos trapezoides mostrados na Figura 3.15.

Para a Figura 3.16 podemos escrever:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{3n} \left[\frac{y_0 - y_n}{2} (y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_{1/2} + y_{3/2} + y_{n-1/2}) \right]$$

que corresponde à fórmula de Simpson e que fornece a área total dos trapezoides curvilíneos $x_0 M_0 M_{1/2} M_1 x_1 M_1 M_{3/2} M_2 x_2 \dots$, onde no lugar dos arcos $M_0 M_{1/2} M_1 x_1, x_1 M_1 M_{3/2} M_2 x_2 \dots$, de uma dada curva $y = f(x)$ consideramos os mesmos arcos das parábolas com eixo vertical. Na Figura 3.16 mostra-se uma parábola $M_0 M_{1/2} M_1$.

Segundo Matheron (1962), a fórmula de Euler -

McLaurin, utilizada para o cálculo aproximado de integrais pode ser usada; a expressão simplificada e de uso prático é:

$$S = \frac{\ell}{n} \left[\frac{5}{12} y_0 + \frac{13}{12} y_1 + y_2 + \dots + y_{n-2} + \frac{13}{12} y_{n-1} + \frac{5}{12} y_n \right]$$

onde S é a área procurada, ℓ é o comprimento constante do intervalo entre as travessas e y o comprimento das próprias travessas. Exemplos de casos particulares são citados pelo autor. Um deles é estimar a área compreendida entre duas travessas y_1 e y_2 , distantes de d:

$$S = \frac{d}{2} (y_1 + y_2) + \frac{d^2}{2} (y'_2 \text{ e } y'_1)$$

O valor $y'_2 - y'_1$ só pode ser calculado se dispusermos de travessas vizinhas, de um lado e do outro de y_1 e y_2 , por exemplo, y_0 e y_3 . A expressão final é:

$$S = d \left[\frac{13}{12} \left(\frac{y_1 + y_2}{2} \right) - \frac{1}{12} \left(\frac{y_0 + y_3}{2} \right) \right]$$

A travessa média

$$tm = S/d = \frac{13}{12} \frac{y_1 + y_2}{2} - \frac{1}{12} \frac{y_0 + y_3}{2}$$

A expressão $1/12(y_0 + y_3/2)$ fornece a ordem de grandeza do erro.

Quando se tem apenas uma das travessas próximas, a expressão da área é

$$S = d \left[-\frac{y_0}{12} + \frac{2y_1}{3} + \frac{5y_2}{12} \right]$$

e para a travessa média $tm = y_0/2 + 2/3 y_1 + 5/12 y_2$. O erro aproximado é igual a $1/12(y_0 + y_2 - 2y_1)$.

A área compreendida entre as travessas y_0 e y_n é representada por

$$S = \frac{1}{n} \left[\frac{3}{8} y_0 + \frac{7}{6} y_1 + \frac{23}{24} y_2 + y_3 + y_4 + \dots + y_{n-3} + \frac{23}{24} y_{n-2} - \frac{7}{6} y_{n-1} - \frac{3}{8} y_n \right]$$

que equivale praticamente à fórmula de Euler - McLaurin.

i) **Nomogramas.** As áreas podem ser determinadas através de um gabarito transparente, com pontos equidistantes organizados em um retículo (quadrado, por exemplo).

Quando menor a área, menor deve ser a distância entre os pontos. Cada ponto tem uma "área de influência"; para pontos na periferia, considera-se metade (ou outro valor fracionário) da área de influência. Dada a escala usada na construção da figura da área sob exame, conhece-se, em metros quadrados, por exemplo, a área de influência de cada ponto. A área total é igual a:

$$S = N_i a + N_j a / 2$$

onde N_i é o número de pontos internos, N_j o número de pontos periféricos e a a área de influência de cada ponto.

j) Examinaremos agora uma questão importante, chamado **efeito de bordo**. Na Figura 3.17 mostra-se uma área reticulada a intervalos regulares. Em A tem-se áreas menores limitadas pelos vértices ou nós dos pontos de amostragem (círculos pretos, dado positivo; círculo vazio

dado negativo); em B, as áreas menores são marcadas como áreas de influência. Assim temos na Figura 3.17:

4 unidades a^2 (4 furos delimitantes: área medida)

7 unidades $3/4 a^2$ (3 furos delimitantes: área indicada)

7 unidades $1/2 a^2$ (2 furos delimitantes: área inferida)

5 unidades $1/4 a^2$ (1 furo delimitante: área inferida)

ou seja, a área total é igual a:

$$S = 4a^2 + 5,25a^2 + 3,5a^2 + 1,25a^2 =$$

$$\begin{matrix} \text{med} & \text{ind} & \text{inf} \\ = 4a^2 + 5,25a^2 + 4,75a^2 \end{matrix}$$

$$S = 14a^2$$

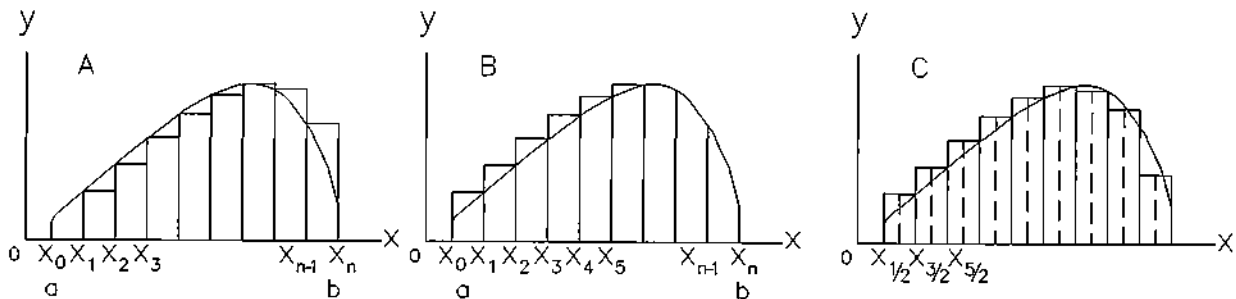


Fig. 3.14 Esquemas para integração de áreas

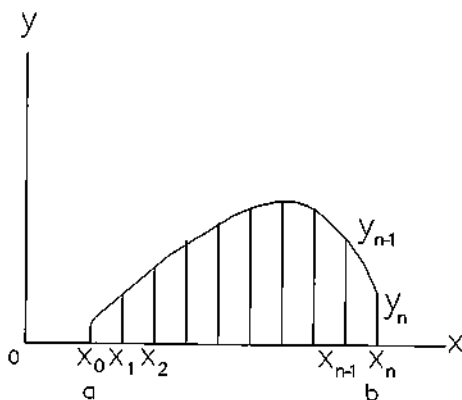


Fig. 3.15 Diagrama para determinação de área pela fórmula do trapézioide.

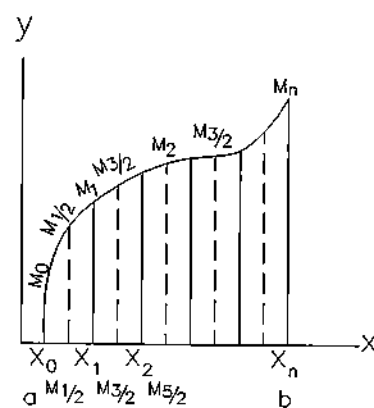


Fig. 3.16 Diagrama para determinação de área pela fórmula de Simpson.

Na Figura 3.17B tem-se

3 unidades a^2 (4 lados cheios: área medida)

3 unidades a^2 (3 lados cheios: área indicada)

5 unidades a^2 (2 lados cheios: área inferida)

3 unidades a^2 (1 lado cheio: área inferida)

ou seja, área total igual a:

$$S = 3a^2 + 3a^2 + 5a^2 + 3a^2 = 3a^2 + 3a^2 + 8a^2$$

$$S = 14a^2$$

A área total dentro do limite externo do depósito é igual. Contudo, a precisão no reconhecimento das sub-áreas é diferente, nos dois casos. Em uma situação as sub-áreas são traçadas unindo-se furo a furo, em outra, assinalam sub-áreas de influência.

		Caso A	Caso B
Área	medida	28,57%	21,43%
	indicada	37,50%	21,43%
	inferida	33,93%	57,14%

Essas relações modificam-se consideravelmente com a variação da geometria do limite externo. No exemplo, as sub-áreas construídas ligando-se furo a furo distribuem-se do seguinte modo: 6 delas são limitadas por quatro linhas cheias (áreas medidas), 12 são limitadas por 3 linhas cheias (áreas indicadas) e 4 são limitadas por 2 linhas cheias (áreas inferidas). Construindo-se áreas de influência, tem-se 4 delas limitadas por 4 linhas cheias (áreas medidas), 8 são limitadas por 3 linhas cheias (áreas indicadas) e 4 são limitadas por 2 linhas cheias (áreas inferidas).

Percentualmente tem-se:

		Caso A	Caso B
Área	medida	27,27%	25,00%
	indicada	54,55%	50,00%
	inferida	18,18%	25,00%

O quadro acima demonstra que o modo de limitar as sub-áreas e o formato do limite externo têm grande importância na estimativa da área ocupada pelo depósito, em termos de grau de reconhecimento.

Uma análise original da questão, oferecida por

Matheron (1962, pág. 221-223) é reproduzida a seguir. Seja dado o arranjo de sondagens (em malha quadrada) para delimitar o depósito (Figura 3.18) constrói-se por extrapolação, o limite externo da área a estimar.

A área da faixa entre o limite externo e o limite que une os furos negativos é significativa em tamanho. A posição limite entre cada par de sondagens positiva-negativa não é independente da posição limite do par vizinho. É difícil representar a posição do limite externo por uma variável aleatória, que tenha um valor qualquer compreendido entre os dois extremos.

Pode-se postular que a área da superfície mineralizada tem por valor $n.a^2$ (n é o número de sondagens positivas, a é o lado do retículo e a^2 , a área da cela). Além disso, podem ser definidos dois valores limites entre os quais a área S fica compreendida. Esses valores são as áreas limitadas pela linha que une as últimas sondagens positivas ou as primeiras sondagens negativas (Figura 3.18). O furo positivo A fica fora da área limite pessimista, delineada pelo traçado de uma linha unindo os furos positivos, enquanto o furo negativo B não influencia o traçado do contorno que liga as sondagens negativas, que seria o limite otimista. O limite médio é obtido usando a área de influência de cada furo positivo.

O depósito, investigado por sondagens (14 positivas e 25 negativas) pode ter a seguinte área, compreendida entre 4 e 26 celas iguais a a^2 :

Estimativa pessimista	$4a^2$
Estimativa média	$14a^2$
Estimativa otimista	$26a^2$

O valor provável ($14a^2$) difere da média dos dois extremos ($15a^2$) mostrando assimetria da lei de probabilidade de S .

A área da estimativa média corresponde a $n.a^2$ (no caso da Figura 3.18, $n = 14$) e tem perímetro $2p$ (no caso da Figura 3.18, $2p = 22a$).

A área entre a superfície média e a superfície otimista é igual a $p.a + a^2$ e aquela entre a superfície média e a superfície pessimista é igual a $pa - a^2$. Tem-se, então:

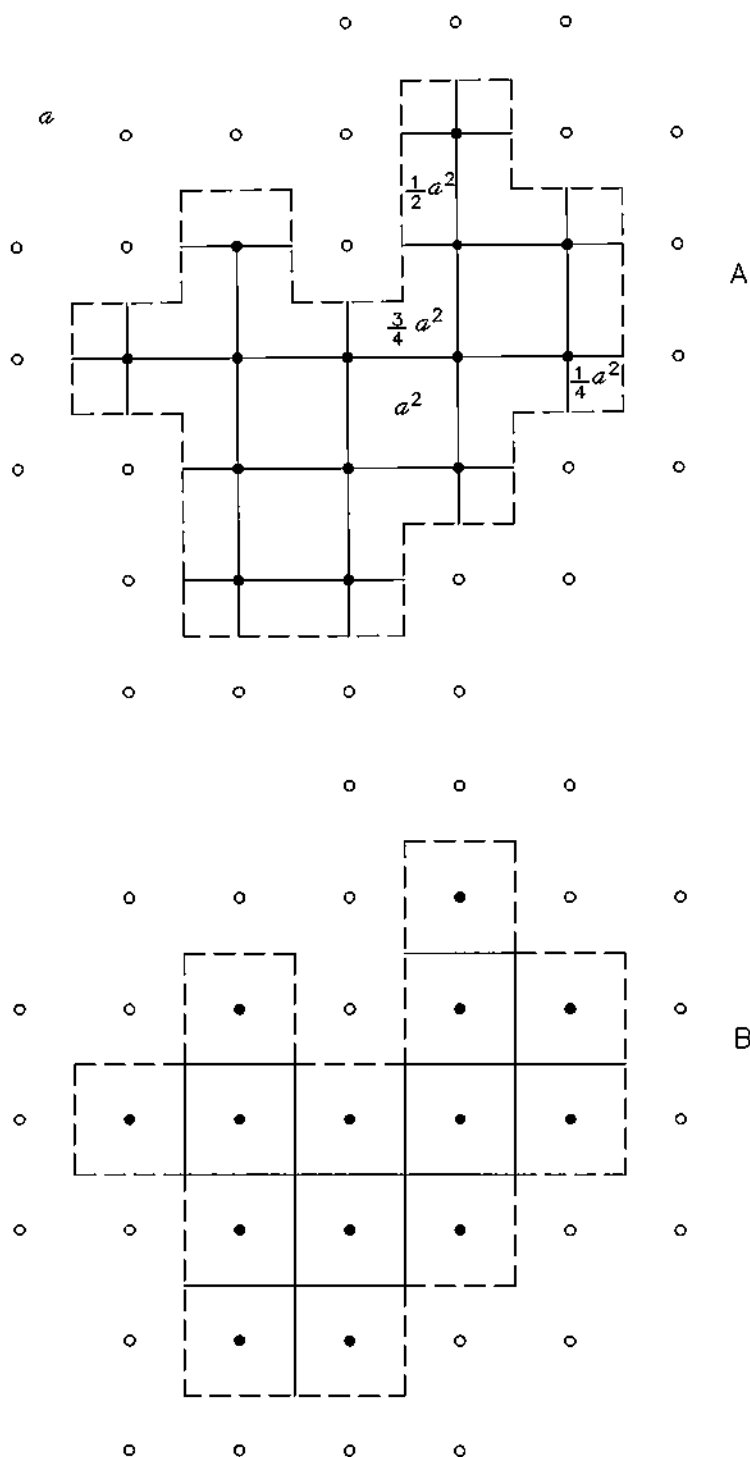


Fig. 3.17 Áreas menores definidas pela meia distância entre furos positivos e negativos pontos de amostragem (diagrama A) ou pela área de influência de cada ponto positivo de amostragem (diagrama B).

Estimativa pessimista (superfície menor):

$$(n+1) a^2 - pa$$

Estimativa média (superfície média): $n \cdot a^2$

Estimativa otimista (superfície maior): $(n+1) a^2 + pa$

A média das estimativas extremas é $(n+1) a^2$.

Qualitativamente pode ser dito que o valor provável da superfície depende do número de sondagens positivas, enquanto a dispersão em torno do valor (erro possível) depende do perímetro do contorno médio.

O erro devido ao **efeito de bordo**, corresponde à variância da área S e é igual à variância geométrica

$$\sigma_s^2 = \frac{p_2 - a_2}{n+2} a_2$$

Quando se trata de uma malha retangular ab , tem-se:

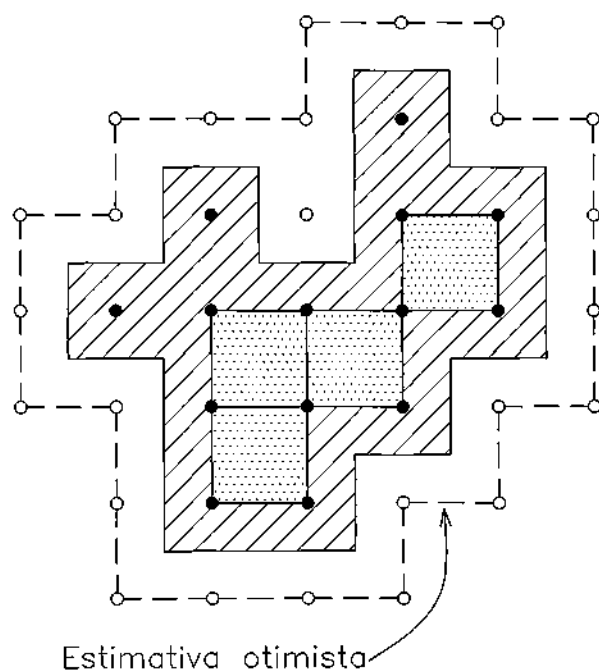
Estimativa pessimista $(n+1) ab - (p_a b + p_b a)$

Estimativa média $n \cdot ab$

Estimativa otimista $(n+1) ab + (p_a b + p_b a)$

onde p_a e p_b são os dois semiperímetros. O erro corresponde a:

$$\sigma_s^2 = \frac{(p_a b + p_b a - a^2 b^2)}{n+2}$$



• Sondagem positiva

○ Sondagem negativa

▨ Estimativa pessimista

▧ Estimativa média

Fig. 3.18 Estimativa de uma área por sondagem em malha regular (segundo Matheron, 1962).

Determinação do volume

Dado a área e a espessura ocupadas por um depósito, o volume do mesmo é obtido pelo produto dessas duas variáveis. Na prática, para calcular o volume, transforma-se o volume do depósito no volume de um sólido geométrico. Em seguida calcula-se o volume desse sólido, aplicando-se fórmulas adequadas.

Para depósitos ou corpos tabulares, calcula-se a área através de métodos simples; se a espessura é variável é interessante introduzir um fator corretivo (erro), por exemplo, através de métodos estatísticos.

Quando a forma do depósito ou do corpo é alongada, a área média pode ser estimativa seccionando-se o mesmo por seções equiespaçadas normais à direção do alongamento. O produto da área média pelo comprimento fornece o volume.

Se a forma do corpo é irregular, o cálculo do volume pode ser uma tarefa difícil. Seções verticais segundo um retículo, combinadas com seções horizontais podem facilitar a representação das áreas ocupadas pelo corpo.

Métodos de calcular o volume são apresentados a seguir.

Volume entre duas seções paralelas horizontais ou verticais

Estimadas as áreas ocupadas pelo corpo em cada seção e conhecida a distância entre as mesmas, podemos formular hipóteses sobre a presumível forma do corpo, do modo seguinte:

1º) Considera-se o corpo correspondendo a um *prisma*. Aplica-se a fórmula:

$$V = \frac{S_i + S_{i+1}}{2} d$$

quando as áreas são aproximadamente iguais. Generalizando, temos:

$$V = (S_1 + 2S_2 + 2S_3 + \dots + 2S_{n-1} + S_n) d / 2 = \\ = \sum_{i=1}^n (S_i + S_{i+1} / 2) d$$

para espaçamento igual entre seções. Se o espaçamento é variável, aplica-se a fórmula do prisma para cada setor entre duas seções sucessivas; a somatória fornece o volume.

2º) Considera-se o corpo correspondendo a uma *pirâmide truncada*. Quando as áreas das seções consecutivas diferem de mais de 20%, sugere-se o uso da fórmula do tronco de pirâmide para calcular o volume entre duas seções:

$$V = \frac{S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \times S_2} \cdot d}{3}$$

A somatória dos volumes individuais fornece o volume do corpo.

3º) Se a forma do corpo é *irregular*, para calcular o volume individual dos blocos entre seções, constrói-se (por interpolação) uma seção intermediária entre duas seções consecutivas. Aplicando a fórmula prismoidal tem-se

$$V = \frac{S_1 + S_2 + 4S_{12}}{6} d$$

onde S_{12} é a seção auxiliar entre as seções consecutivas S_1 e S_2 .

O volume do corpo é obtido pela somatória dos volumes parciais.

4º) Quando se calcula o volume por uma das fórmulas acima há uma correção a fazer nas extremidades do corpo. O fator de correção é o seguinte (fórmula da cunha, para cada extremidade, ver Figura 3.19):

$$FC = (S_1 \times d_1) / 2 + (S_4 \times d_4) / 2$$

quando se adota a fórmula do prisma. O mesmo se aplica para outras fórmulas.

Fórmula de Euler-McLaurin

Em seção anterior foi apresentada a fórmula de Euler-McLaurin simplificada e prática, para determinação de áreas, conforme proposição de Matheron (1962). As observações a seguir são baseadas no trabalho desse autor. O volume V do depósito depende da função $S(z)$ que representa a área do corpo, em uma dada seção, em dado nível de cota z . A partir das áreas $S_1, S_2, \dots, S_n$ de n seções em níveis sucessivos tem-se

$$V = \int_a^b S(z) dz$$

Matheron (*op. cit.*) argumenta que o cálculo numérico da integral, com simplificações, resulta na fórmula

$$V = \frac{H}{n} \left(\frac{3}{8} S_0 + \frac{7}{6} S_1 + \frac{23}{24} S_2 + S_3 + \dots + S_{n-3} + \frac{23}{24} S_{n-2} + \frac{7}{6} S_{n-1} + \frac{3}{8} S_n \right)$$

onde H é a distância entre os dois níveis (seções) extremos. O uso da fórmula pressupõe um mínimo de seis seções ou níveis. Se o número é menor, soma-se, intervalo a intervalo, as estimativas para cada bloco compreendido entre dois níveis ou duas seções consecutivas. Tem-se:

$$V = h \left(\frac{13}{12} \frac{S_1 + S_2}{2} - \frac{1}{12} \frac{S_0 + S_3}{2} \right)$$

$$V = h \left(-\frac{S_0}{12} + \frac{2}{3} S_1 + \frac{5}{12} S_2 \right)$$

onde h é a distância entre as áreas dos dois níveis ou seções mais próximas, S_0 e S_3 ou, então, apenas de um deles, S_0 .

O reconhecimento através de três níveis fornece:

$$V = \frac{H}{6} (S_1 + 4S_2 + S_3)$$

onde $H = 2h$ é a distância entre o primeiro e o terceiro níveis. Essa fórmula corresponde à fórmula prismoidal já vista.

Método das Isolinhas

Isolinhas são curvas que ligam pontos de igual valor de um atributo. Por exemplo, um mapa topográfico é constituído por isolinhas de igual cota.

Dado um retículo de amostragem, realizada com furos de sonda, podemos construir mapas derivados, de isóbatas de capa e da lapa do depósito, de isólitais (espessura) do material mineralizado, de isoteores, de relação estéril de cobertura para material mineralizado etc. As linhas desses mapas representam isolinhas.

Mapas de isolinhas, de boa qualidade, exigem considerável massa de informações. Isolinhas podem ser interpoladas e extrapoladas. A construção das mesmas pode ser feita de modo variado:

- Desenho mecânico dos contornos (interpolação contínua entre pontos sucessivos de controle);
- Desenhado os contornos igualmente espaçados (locais onde não existem dados ficam realçados);
- Os contornos são construídos utilizando-se interpretação (isto significa que certas tendências, conhecidas ou inferidas, são mostradas);
- Utiliza-se técnica estatística para construção, usando-se uma função contínua. O método chama-se *trend*

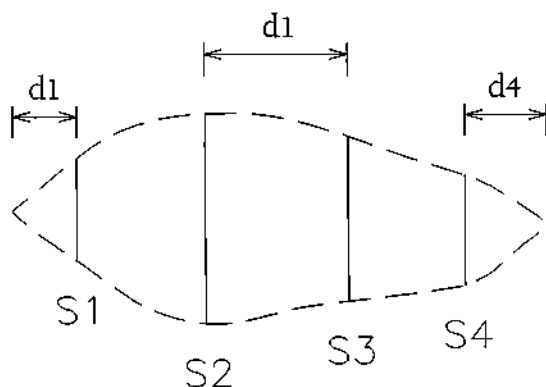


Fig. 3.19 Seção normal aos traços das áreas S_1, S_2 , etc. A distância que separa os traços das áreas d_1 e d_4 corresponde as distâncias das extremidades do corpo.

analysis e o produto, *trend surface*. Tem como princípio a idéia que a expressão geológica de um fenômeno resulta da interação de processos diversos que originam um aspecto regional; flutuações locais são provadas por desvios de aspecto regional, em áreas menores. O método é amplamente discutido por Davies (1973), que também apresenta a utilização das séries de Fourier na abordagem da questão.

e) O retículo de pontos de controle para a construção das curvas pode ser obtido utilizando-se a técnica da *média móvel*. A técnica é mais efetiva se utilizamos uma base com nós ou pontos igualmente espaçados, visando obter dados adicionais para desenho das isolinhas.

O princípio da técnica é admitir que um conjunto de observações consista de uma parte onde o esquema de variação tem significado ("sinal") e outra parte tem variação aleatória ("ruído").

A expressão mais simples para a média móvel é:

$$\hat{X}_i = \sum_{l=k}^{l+k} X_j$$

O valor k é igual a $(e-1)/2$, onde e define o comprimento do intervalo de observações que se quer suavizar, ou seja, o número de pontos usados para estimar a média. Este número é ímpar, para que $\hat{X}_i$ se posicione no ponto central; além disso, como as observações correspondem a $(e-1)/2$ de ambos os lados dos dados a suavizar, os primeiros e últimos valores não podem ser estimados.

O exemplo da Figura 3.20 esclarece a apresentação acima. O espaçamento e na figura é igual a 3.

Depósitos minerais que apresentam flexuras ou que se comportam com monoclinais aparecem com isolinhas mais ou menos paralelas e o valor das mesmas cresce ou decresce segundo uma direção. Se o depósito é falhado, essa estrutura é mostrada pela superposição das isolinhas ao longo de uma linha e as isolinhas equivalentes, e que de um e outro lado da linha mostram deslocamentos.

Se as isolinhas representam a capa (ou a lapa) do depósito, o espaçamento das mesmas permite calcular o mergulho da capa (ou da lapa). Por exemplo, a diferença

de nível entre as isolinhas é de 50 metros e a distância entre a primeira e a última isolinha, na porção que está sob exame é de 99 m; o mergulho é de $\sim 30^\circ$ ($\text{tg } 30^\circ = 50/99 = 0,505$)

Se as isolinhas representam a capa e a lapa do depósito (isto é, seus contornos estruturais), a subtração de uma superfície pela outra fornece um mapa de variação de espessura do mesmo. A isolinha de espessura zero representa o traço da linha de contato entre a capa e a lapa.

Uma grande variedade de mapas de isolinhas pode ser construída. Interessa-nos, no momento, utilizar tais mapas para medidas de volume. Seja o mapa da Figura 3.21, que representa isolinhas de espessura de um dado depósito, no retângulo que limita o mapa. As seções geológicas BB', CC' e DD' mostram porções do corpo sob discussão. O mapa representa um corpo equivalente, limitado por uma superfície plana de um lado e por uma superfície complexa, do outro, mostrada através de contornos de igual espessura. Cada contorno é a projeção de uma fatia em forma de lâmina, as lâminas sucessivas tendo a mesma espessura (no exemplo, 10 metros).

O depósito modelado pelas isolinhas é distorcido em relação ao depósito real (mostrado nas seções verticais) e está dividido por uma série de seções paralelas igualmente espaçadas.

O volume do corpo mineral representado na Figura 3.21 pode ser calculado facilmente. Determinam-se as áreas ocupadas por cada contorno sucessivo. Por construção, a distância entre as áreas é constante. Assim, a somatória dos volumes parciais entre seções que contêm as áreas, fornece o volume do corpo.

O volume parcial de cada bloco interáreas pode ser calculado por um dos métodos já discutidos. Pode-se aplicar a fórmula prismoidal para obter os volumes parciais (V_p)

$$V_p = \frac{H}{6} [S_1 + 4S_2 + S_3]$$

onde S_1 , S_2 e S_3 são as áreas de três níveis sucessivos e H é igual a $2h$, distância entre o primeiro e o terceiro níveis

(no caso, 20 m). A somatória dos volumes parciais é o dado procurado.

O método das isolinhas é bastante representativo quando estamos investigando a variação da propriedade ou parâmetro. No caso da estimativa de volume obtêm-se uma modelagem de alta confiabilidade para avaliar a forma externa do corpo, sua espessura, presença de dobras e falhas, etc.

O método das isolinhas só é operativo quando dispomos de retículo regular de serviços exploratórios. Em caso contrário é conveniente regularizar o retículo, para facilitar a construção dos contornos.

Com a grande facilidade que os computadores oferecem, o traçado dos contornos pode ser feito muito facilmente.

Método dos Prismas Poligonais

Trata-se de um método simples. O corpo mineral é substituído por prismas de base poligonal; a base é formada pela área de influência ao redor de cada serviço exploratório (poços, furos), conforme Figura 3.22. Os polígonos são construídos unindo-se nós de pesquisa, por meio de linhas; no ponto médio de cada linha constroem-se perpendiculares; sua intersecção origina os vértices dos polígonos (Fig. 3.22B).

Para a faixa de bordo (faixa marginal), o limite externo pode ou não ser tomado como tendo zero de espessura. O volume dos polígonos marginais é calculado considerando-se sua espessura como igual à metade da espessura do serviço considerado para construir um dado polígono marginal.

Obtidas as áreas de cada polígono, multiplicam-se as mesmas pelas respectivas espessuras médias e a somatória dos produtos é o volume procurado.

O método não leva em consideração nenhum parâmetro geológico; exceto a espessura, não se ganha informação sobre a forma real do depósito etc.

O método é operativo para corpos de morfologia regular, tabulares, com atributos (por exemplo, espessura) variando de modo muito regular.

Métodos dos Fatores Médios

Ao método são atribuídos diversos procedimentos que utilizam parâmetros variados, como médias aritméticas, médias ponderadas, analogia e blocos geológicos.

Todos os procedimentos são baseados na idéia que certas parcelas (blocos) do corpo mineral sob investigação, são similares em termos geológicos e tecnológicos com porções já estudadas ou com blocos explorados ou explorados. O corpo mineral é dividido em blocos construídos com base em geologia (estrutura, espessura, teor, etc.), exploração (profundidade e estéril de cobertura) ou economia (valor). Além disso, em um dado segmento do corpo determinam-se características que são aceitas como representativas do mesmo, em parte ou no todo.

Para blocos do mesmo tamanho as características têm igual influência na determinação dos fatores médios.

As fórmulas para o cálculo de recursos e reservas podem ser muito simples ou muito complexas. Fatores como teor, espessura, volume, densidade, toneladas recuperadas por unidade de área, etc. podem ser usados.

Quando se utiliza **analogia**, admitimos ou inferimos que certas semelhanças implicam em similaridade de um dado bloco a um análogo bem conhecido, de um bloco do corpo ou de corpo similar.

As variáveis utilizadas nos cálculos são baseadas em algumas observações ou, então, podem ser calculadas a partir de dados obtidos nos depósitos sob estudo ou em depósitos similares. As variáveis ou parâmetros são admitidos como constantes nos diversos segmentos do depósito ou em outros depósitos.

O método analógico é muito usado em operações de extração; por exemplo, a quantidade de espodumeno nos pegmatitos do rio Pará (distrito de Araçuaí, MG), em

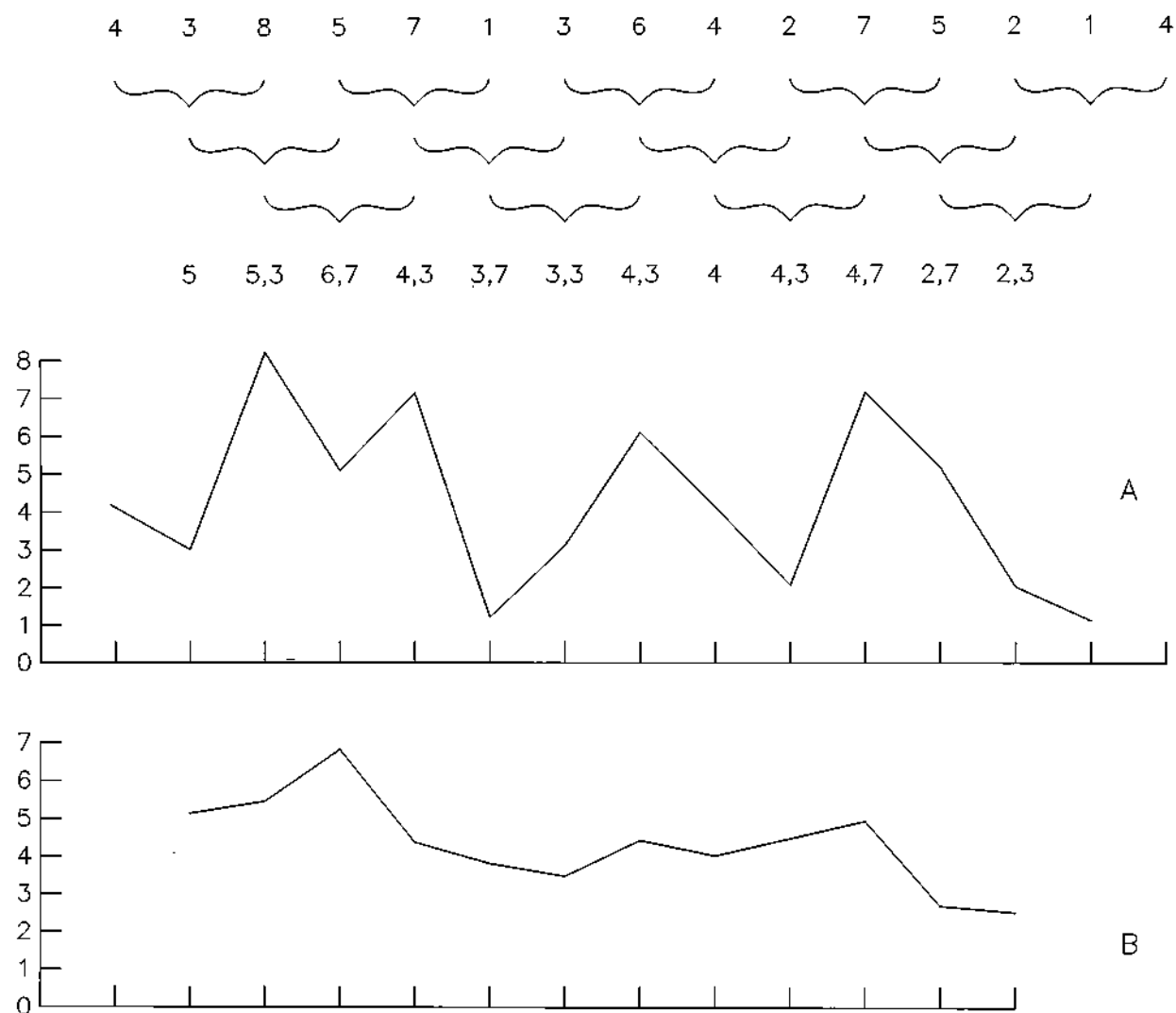


Fig. 3.20 Cálculo e representação gráfica de uma média móvel. Em A, sequência original, em B; média móvel.

3. Cálculos para a determinação dos parâmetros dos corpos minerais

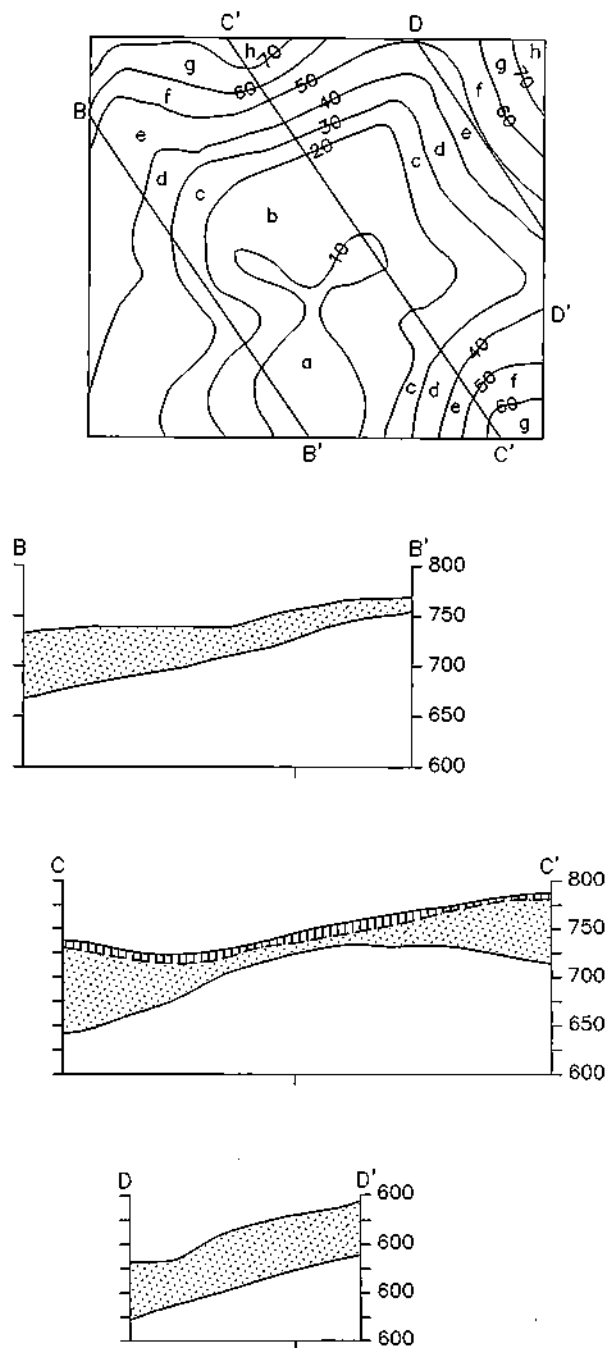


Fig. 3.21 Mapa de isolinhas, para medida de volume. Mostram-se seções com o comportamento do corpo de minério.

porções não lavradas, pode ser estimada entre blocos para cima ou para baixo, utilizando-se dos registros de produção do mineral, em outras partes do pegmatito.

A média aritmética é o parâmetro mais simples do método analógico. Utilizam-se os dados disponíveis, conforme Tabela 3.1. O teor pode ser calculado de modo ponderado (espessuras e teores individuais), conforme Tabela 3.2. Se o número de amostras é elevado, o teor médio pode ser estimado estatisticamente. Na Tabela 3.3 mostram-se os cálculos para determinação do recurso (ou reserva); todos os fatores médios são ponderados.

Tabela 3.1. Determinação do teor médio para um bloco

Serviços	Espessura (m)	Teor (%)
A	e_1	t_1
B	e_2	t_2
C	e_3	t_3
...	...	...
N	e_n	t_n
Total	$\sum_{i=1}^n e$	$\sum_{i=1}^n t$
Média	$e_m = \sum_{i=1}^n e / n$	$t_m = \sum_{i=1}^n t / n$

Tabela 3.2. Determinação do teor médio ponderado para um bloco

Serviços	Espessura (m)	Teor (%)	Produto $e \times t$
A	e_1	t_1	$e_1 \cdot t_1$
B	e_2	t_2	$e_2 \cdot t_2$
C	e_3	t_3	$e_3 \cdot t_3$
...	...	...	...
N	e_n	t_n	$e_n \cdot t_n$
Média	$\sum_{i=1}^n e$	$\sum_{i=1}^n t$	$\sum_{i=1}^n e \cdot t$
Teor Médio ponderado $\frac{\sum_{i=1}^n e \cdot t}{\sum_{i=1}^n t}$			

Tabela 3.3. Reservas do Corpo

Blocos	Área m ²	Espessura m	Volume m ³	Reservas ton.	Componente valioso	
					Teor médio %	Reserva ton.
A	a _A	e _A	V _A	Q _A	t _A	P _A
B	a _B	e _B	V _B	Q _B	t _B	P _B
C	a _C	e _C	V _C	Q _C	t _C	P _C
...	...	...	...	...	...	...
N	a _N	e _N	V _N	Q _N	t _N	P _N
Total	$\sum_{i=1}^n a$	---	$\sum_{i=1}^n V$	$\sum_{i=1}^n Q$	---	$\sum_{i=1}^n P$
Média	---	$E_m = \frac{\sum_{i=1}^n V}{\sum_{i=1}^n a}$	---	---	$T_m = \frac{\sum_{i=1}^n P}{\sum_{i=1}^n Q}$	---

As fórmulas usadas são:

a) Espessura média: $E_m = \frac{e_1 + e_2 + \dots + e_n}{n}$

b) Teor médio: $T_m = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_n}{n}$

c) Teor médio ponderado (pela espessura):

$$T_{mp} = \frac{t_1 e_1 + t_2 e_2 + \dots + t_m e_m}{e_1 + e_2 + e_m}$$

d) Volume do corpo V = Área x Espessura média

$$(V = A \cdot em)$$

e) Tonelagem T = T₁ + T₂ + ... T_n = V₁f₁ + V₂f₂ + ... + V_nf_n (V = volume e f = fator densidade)

f) Tonelagem do componente valioso: P = T x C_m onde P é a soma das reservas de cada componente valioso dos blocos, T é a soma das reservas dos blocos e C_m é o teor médio, igual a P / T.

A utilização do procedimento da média é simples para se calcular. Torna-se exato quando se tem parâmetros determinados com alta qualidade, numerosos e distribuídos

de modo uniforme no corpo. O tipo e o tamanho do depósito podem eliminar o uso do procedimento apresentado. Depósitos com parâmetros uniformes produzem resultados exatos; os serviços devem ser regularmente distribuídos.

Os fatores para o cálculo de reservas são estabelecidos com base em termos de produção, do valor, da experiência, do rendimento da concentração, etc. Os fatores são expressos em função do que se recupera por unidade de área, de volume ou de peso:

Ouro de aluvião: gramas por m³

Minerais pesados: quilos por m³

Carvão: tonelada por m²

Metálicos e não metálicos: % em peso ou quilo por tonelada.

Quando a modelagem geológica é de boa qualidade e os fatores utilizados são corretamente determinados, podem ser feitos cálculos exatos.

O método analógico é aplicado com bons resultados nos depósitos tabulares, com baixa variabilidade, como carvão, fosfato sedimentar, bauxitas, caolim sedimentar, etc., usando-se dados de sondagem, de trincheiras e de poços.

Quando se dispõe de mapas geológicos e seções geológicas detalhados, amostragem bem distribuída e análises, é possível utilizar analogia para outras porções de interesse econômico.

O método dos blocos geológicos é usado correntemente. Com base em dados de exploração estabelece-se o bloco geológico, que pode ser uma pequena porção de um depósito, até mesmo todo o depósito. Os dados de exploração são registrados e interpretados, usando-se mapas e seções. Os limites de cada bloco podem coincidir com os limites naturais do depósito ou podem ser estabelecidos com base em aspectos geológicos (variações de teor, de espessura, presença de estruturas dobradas ou falhadas, etc). Os blocos podem ainda ser delineados a partir de extração segundo ou dado método, ou por método de beneficiamento adaptado ao tipo de minério, etc.

Os fatores utilizados no método dos blocos geológicos são baseados nos dados de pesquisa (resultado de amostragem, por exemplo) e dados de produção. Os dados de pesquisa são interpretados usando-se a regra das variações graduais, limites de influência ou

generalização. Analogia é utilizada para obter os parâmetros de cada bloco. Os recursos são determinados do modo apresentado nas tabelas 3.1, 3.2 e 3.3.

A precisão dos resultados depende de número adequado de dados.

O método dos fatores médios usa procedimentos simples. Os procedimentos são aplicáveis a tipos diversificados de depósitos. A aplicabilidade do método depende da semelhança geológica entre o bloco avaliado e o modelo usado.

O sucesso da aplicação do método depende da homogeneidade dos blocos em que o depósito é dividido e o tamanho dos mesmos pode ser tal que abarca vários serviços exploratórios.

Um exemplo é mostrado na Figura 3.23, onde se tem um corpo de minério brando, na superfície (ver nas seções o limite entre minério brando b e duro d e minério separado por falha vertical). Os recursos entre os limites interno e externo não foram considerados; há um bloco detalhadamente investigado, com recursos medidos (M), separados em materiais brando (b) e duro (d). O segundo

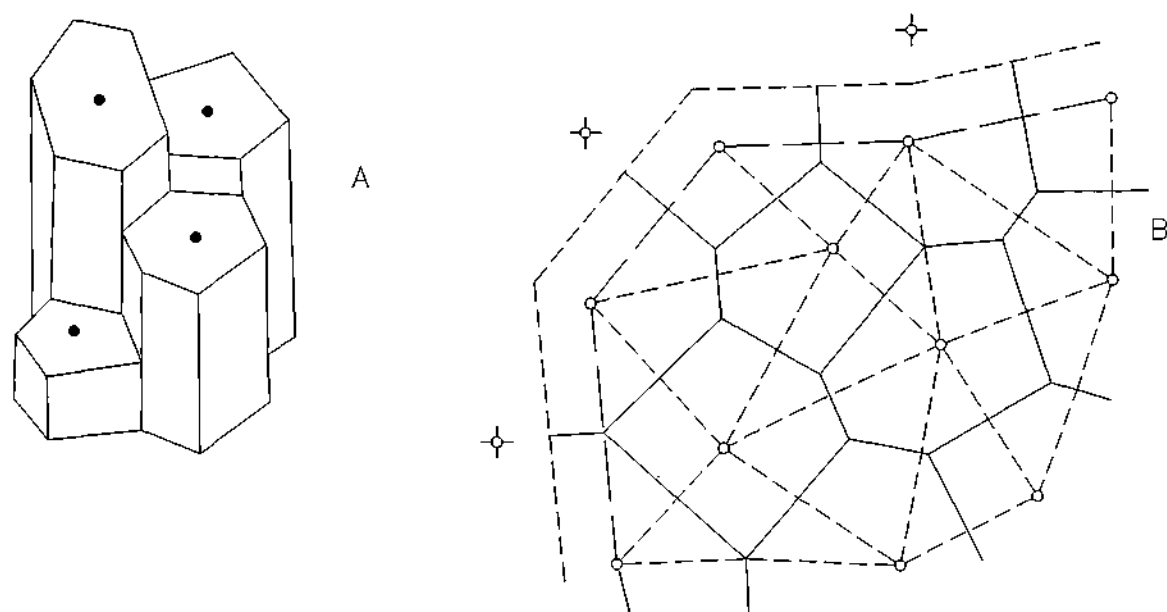


Fig. 3.22 Método de calcular volume através de prismas poligonais. Em A, arranjo mostrando os prismas; em B, prismas observados em seção horizontal, onde foram projetados. Observar furos positivos e negativos (circulo com cruz).

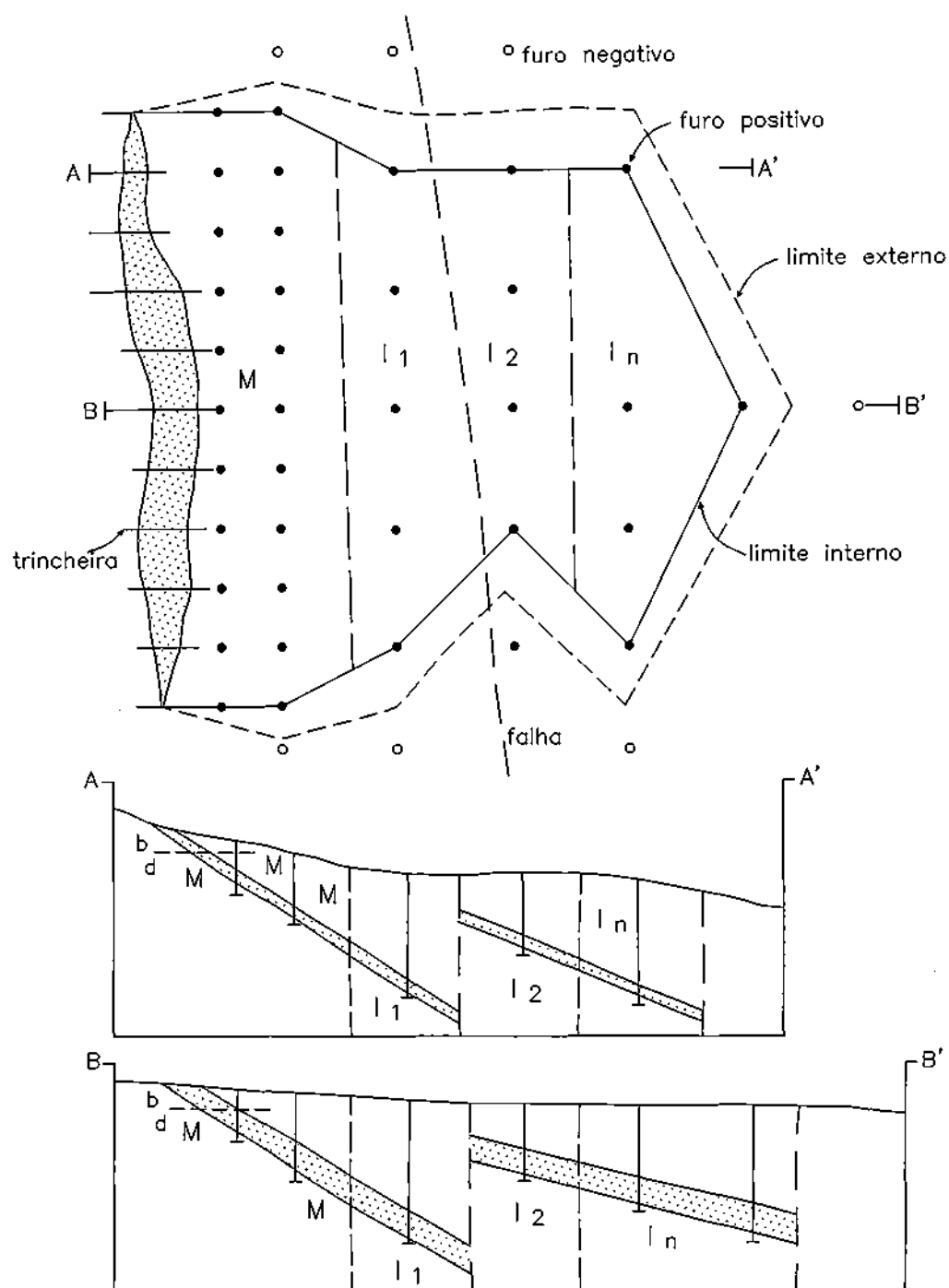


Fig. 3.23 Método dos blocos geológicos. b = minério brando, d = minério duro.

bloco tem uma falha passando pelo mesmo; a malha de exploração é regular e mais aberta; tem-se recursos indicados (I), separados pela falha (I_1 e I_2).

O terceiro bloco é de recursos inferidos (I_n) e seu limite interno tem apenas três pontos de contato. A delimitação das classes de recursos foi realizada no mapa e no caso do minério brando e duro, nas seções geológicas. Apenas duas seções estão representadas. Para evitar manipulação relacionada à distorção na projeção que representa o mapa geológico, anotam-se nas seções as classes de reservas. Medem-se as áreas em cada bloco M , I_1 , I_2 , e I_n e obtém-se a área média; calculam-se as espessuras a partir dos blocos da sondagem e estimam-se as espessuras médias para cada bloco. Em seguida, obtém-se o volume.

O procedimento acima exposto permite organizar tabela com todos os dados.

Método das Seções

As fórmulas apresentada até o momento aplicam-se a depósitos representados em seções verticais e horizontais, que permitem visualizar realisticamente a forma e comportamento espacial do mesmo. A complexidade do depósito, em especial quando há caimento ao longo de um eixo torna trabalhosa a construção das seções, em termos de posicionamento correto. Estruturas dobradas devem ter seções construídas normalmente ao eixo da dobra, para evitar distorções.

Outra questão importante é relacionada às obras de pesquisa, que devem ser mostradas nas seções.

O método das seções exige que os trabalhos de pesquisa atravessem capa e lapa do depósito; isso permitirá evitar o máximo possível a aplicação de interpolação – extrapolação.

A aplicação das fórmulas depende da apreciação da forma do corpo em cada seção e da variabilidade da área do mesmo, seção a seção. As fórmulas são simples e de uso direto. A fórmula do prisma é usada quando as áreas

medidas em cada par de seções não difiram de mais de 20%; nem último caso aplica-se a fórmula do tronco da pirâmide. A fórmula da cunha é aplicada para os extremos ou terminações dos blocos.

A fórmula prismoidal e a fórmula de Euler – McLaurin são de uso trabalhoso, pois exigem número significativo de seções. Fornecem grande exatidão na determinação do volume de sólidos de forma variada.

Em resumo, o método das seções permite bem avaliar a forma e comportamento dos corpos geológicos, quando há capa e lapa definidas, quando a dimensão for média a grande, a espessura variando regularmente, etc.

Na prática é conveniente usar dois conjuntos de seções verticais, normais entre si, para estimar volumes. Comparados os resultados, não devem diferir de mais de 10%, quando os corpos são regulares.

No caso de seções horizontais as vantagens são diversas, especialmente no tocante ao espaçamento e visualização do corpo.

Com base nos dados de geologia de superfície e subsuperfície constroem-se as seções, de preferência com igual espaçamento. As seções podem ser horizontais (por exemplo, níveis de lavra a céu aberto ou subterrânea) ou verticais. Os blocos para cálculo compreendem o volume do corpo entre duas seções consecutivas ou, então, do corpo que vai até a metade da distância de uma dada seção para as seções anterior e posterior. O volume do corpo é obtido pela somatória dos volumes dos blocos, estimados pelas áreas das seções multiplicadas pela metade da distância entre seções

$$\left(V = \sum_{i=1}^n \frac{A_i \cdot d}{2} \right)$$

ou, então pela somatória da semisoma das áreas entre seções consecutivas, multiplicadas pela distância entre as mesmas

$$\left(V = \sum_{i=1}^n A_i + A_j / 2 \cdot d \right)$$

A Figura 3.24 ilustra as duas situações.

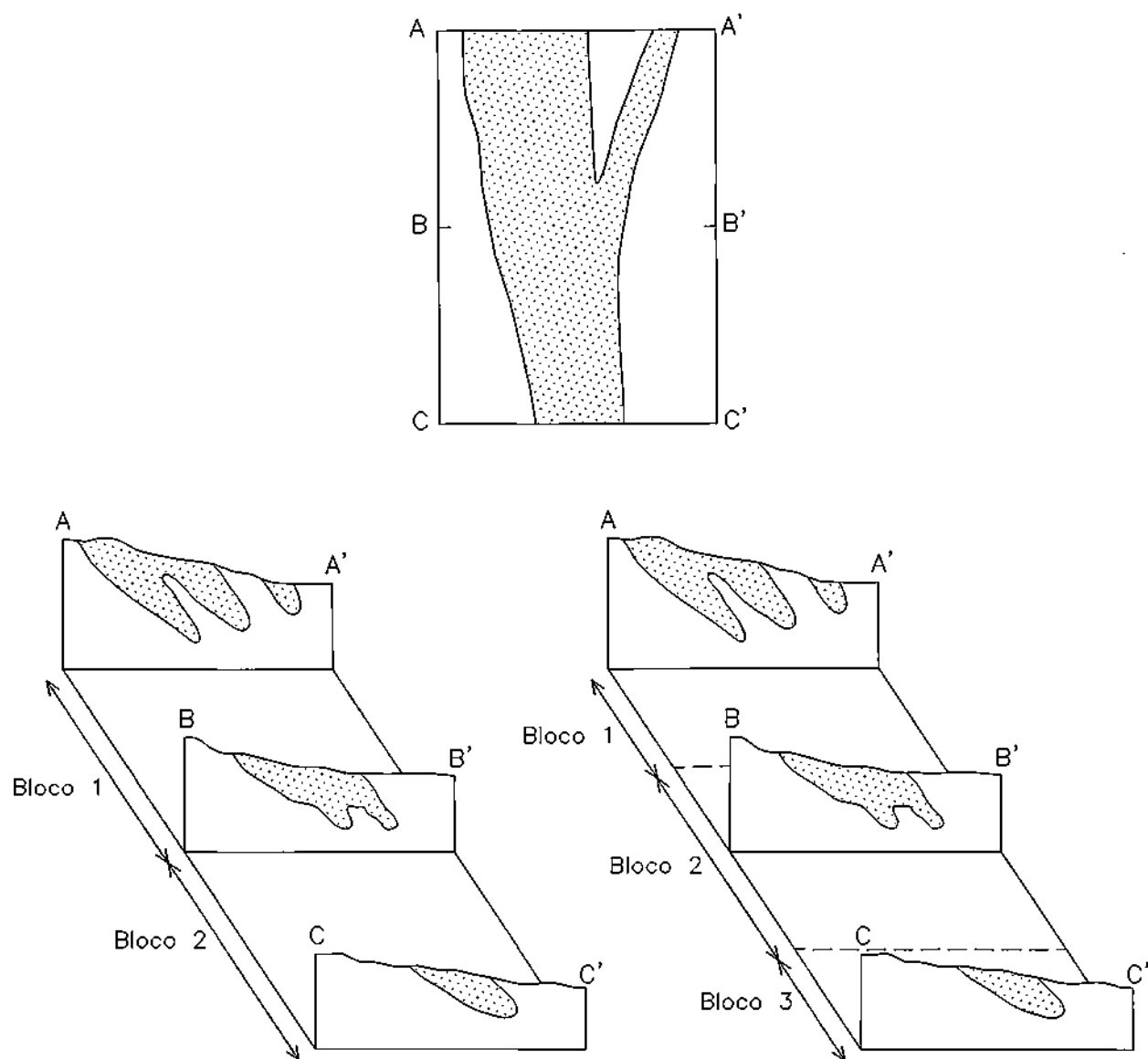


Fig. 3.24 Método das seções. No diagrama à esquerda os blocos são definidos pela distância entre seções; no diagrama à direita os blocos são definidos pela média distância entre uma seção e as outras duas, uma delas anterior e a outra posterior.

Método da janela móvel

O método aplica-se a casos especiais de depósitos que têm propriedades muito variáveis e erráticas. É adequado quando se opera com cálculo envolvendo bancadas de lavra, nas quais se tem amostragem feita segundo malha regular ou não.

O cálculo se assemelha ao cálculo através de média móvel, pois suaviza os valores obtidos na medida da propriedade sob exame.

Inicialmente divide-se a área de interesse usando-se um retículo quadrado ou retangular. Abre-se uma janela em um cartão, com um dado tamanho (por exemplo, com o dobro do tamanho da cela do retículo). Superpõe-se o cartão a uma cela, coincidindo seus centros e calcula-se a média aritmética (ou logarítmica) do parâmetro e o valor é assinalado no centro da cela. Desloca-se o cartão para a cela seguinte e assim sucessivamente, para toda a área.

Na Figura 3.25 é apresentado um exemplo do método.

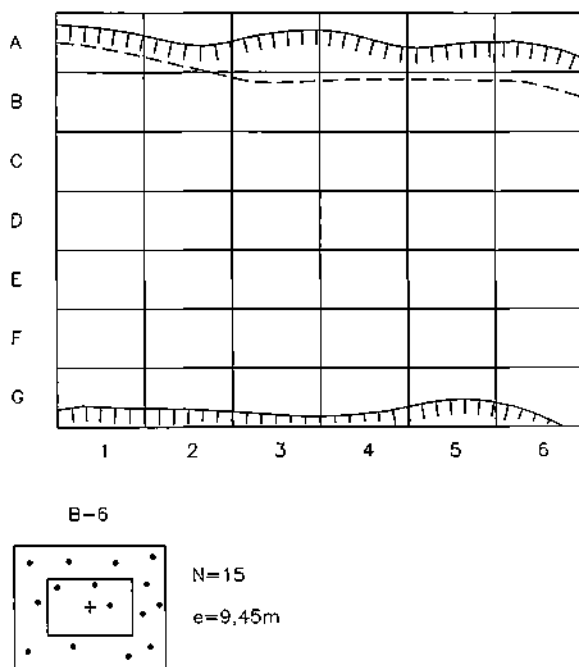


Fig. 3.25 Método da janela móvel.

Método dos prismas triangulares

Representam-se os serviços de pesquisa por seus traços. O corpo mineral é dividido em triângulos projetados em uma seção; os triângulos unem os traços dos serviços de pesquisa. Cada triângulo representa a base de um prisma triangular, de arestas a_1a_2 , a_2a_3 e a_3a_1 . Os atributos (por exemplo, espessura do corpo) correspondem a a_1 , a_2 e a_3 . O corpo é substituído por blocos prismáticos de base triangular (Figura 3.26).

O volume de cada prisma é calculado pela fórmula:

$$V = \frac{1}{3} (a_1 + a_2 + a_3) A$$

onde a_1 , a_2 e a_3 são as espessuras do corpo em cada serviço de pesquisa e A a área do triângulo basal. A somatória dos valores dos prismas de base triangular fornece o volume do corpo.

O método só é prático, com resultados corretos, quando os corpos são regulares (espessura e teor) e horizontalizados.

O erro relativo no cálculo ao volume de um bloco atravessado por quatro furos de sonda é apresentado a seguir (segundo Popov, 1966). Sejam a_1 , a_2 , a_3 e a_4 as espessuras do corpo em cada furo e A a área da base A_1 , A_2 , A_3 e A_4 (Figura 3.27). O volume do bloco pode ser calculado de dois modos:

a) Soma os volumes dos prismas triangulares $A_1 A_3 A_4$ e $A_2 A_3 A_4$:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} (a_1 + a_2 + a_4) \frac{A}{2} + \frac{1}{3} (a_2 + a_3 + a_4) \frac{A}{2} \\ &= \frac{1}{6} (a_1 + 2a_2 + a_3 + 2a_4) A \end{aligned}$$

b) Soma dos volumes dos prismas triangulares $A_1 A_2 A_3$ e $A_1 A_3 A_4$:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} (a_1 + a_2 + a_3) \frac{A}{2} + \frac{1}{3} (a_1 + a_3 + a_4) \frac{A}{2} \\ &= \frac{1}{6} (2a_1 + a_2 + 2a_3 + a_4) A \end{aligned}$$

O volume do bloco é a média de V_a e V_b :

$$V = \frac{V_a + V_b}{2} = \frac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)A$$

O erro relativo entre os volumes V_a e V_b é:

$$\Delta V = V_a - V_b = \pm A/6(a_1 - a_3 + a_3 - a_4) \\ \pm A/6\{(a_1 - a_3) + (a_3 - a_4)\}$$

Para ΔV igual a zero, V_a e V_b são iguais; portanto

$a_1 + a_3 = a_2 + a_4$ o que significa que o método é preciso quando a soma das arestas opostas de cada prisma retangular é igual. Por exemplo, se $a_1 + a_3$ é duas vezes menor que $a_2 + a_4$, ou seja,

$$2(a_1 + a_3) = (a_2 + a_4),$$

$$V_a \text{ é menor que } V_b \text{ de } \frac{A}{12}(a_2 + a_4),$$

o que corresponde a erro relativo de 20 por cento.

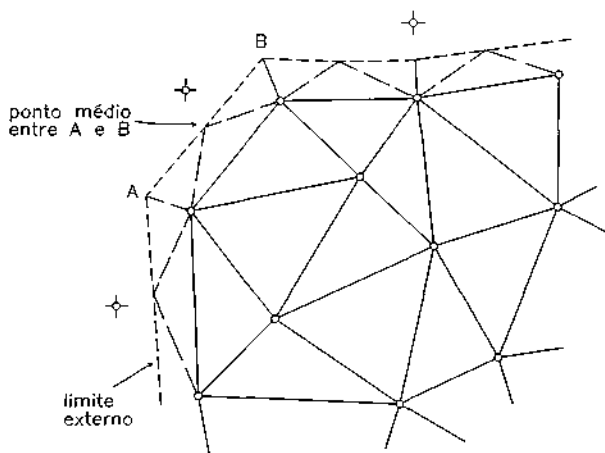


Fig. 3.26 Método dos prismas triangulares.

Método dos blocos de Lavra

Um bloco de lavra pode ser definido como uma porção do corpo mineral delimitada por obras de pesquisa (Figura 3.28). O tamanho e a forma do bloco são determinado pelos serviços de exploração e de desenvolvimento, aspectos geológicos e considerações econômicas.

Na prática os blocos têm formato retangular com sua base situada no plano de uma seção vertical ou longitudinal inclinada, dependendo das características do depósito. A forma mais comum de um bloco é a paralelepípedica; o volume do bloco de minério é calculado como produto da área pela espessura média ($V = A \times e_m$), e a tonelagem, como produto do volume pela densidade ($Q = V \cdot f$) e a tonelagem de metal, como produto da tonelagem do minério e teor médio ($P = T \cdot t_m$). O procedimento para os cálculos é dado nas tabelas 3.4 e 3.5. Salienta-se que a densidade é uma VR (variável regionalizada) como qualquer outra (teores, granulometrias, etc), carecendo de estudo e estimativa também.

Os blocos de lavra podem ser delineados por uma combinação de galerias, poços e furos de sonda. A atribuição de recursos e reservas por classe depende do tipo de depósito, tipo e densidade das escavações e custos. A exatidão depende do modo pelo qual os blocos são delineados e do método e exatidão da amostragem. Admitindo que todas as obras têm a mesma exatidão, diversas situações são comentadas a seguir.

1º. Bloco exposto nos quatro lados por escavação subterrânea

O cálculo de reservas de blocos de mineração, abertos em todos os lados, é feito determinando-se fatores médios para cada serviço de pesquisa e para cada bloco; computa-se volume, tonelagem de minério e de metal para cada bloco e sumariza-se a reserva de todos os blocos de mesma classe e computam-se os fatores médios ponderados para cada classe e para todo o depósito mineral.

(a) *Determinação dos fatores médios para cada obra de pesquisa.* Quando a espessura de um corpo mineral é

uniforme e menor que a largura das escavações subterrâneas, os fatores médios são usualmente expressados com média aritmética simples das variáveis de interesse. A espessura média pode ser computada por ponderação com áreas de influência de cada espessura dependendo da forma e tamanho do corpo mineral, irregularidades nos valores na densidade e correta distribuição das observações.

Em corpos irregulares o teor médio para uma obra de pesquisa é computada ponderando-se cada amostra por áreas, volumes e tonelagens apropriadas.

(b) *Determinação de fatores médios para cada bloco.* Quando a espessura do corpo mineral é menor que a largura da escavação os fatores médios são computados do modo seguinte:

Os comprimentos de todos os lados são iguais:

$$e_m = \frac{e_1 + e_2 + e_3 + e_4}{4}$$

$$t_m = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4}{4}$$

onde e_1, e_2, e_3, e_4 são espessuras medidas ou calculadas para cada escavação; t_1, t_2, t_3, t_4 são teores para as mesmas escavações.

Os comprimentos dos lados são desiguais e não há relação entre teor e espessura; os fatores médios de um bloco de mineração podem ser calculados pela ponderação de cada

escavação segundo seus comprimentos $C_1 + C_2 + C_3 + C_4$.

$$e_m = \frac{e_1 + C_1 + e_2 + C_2 + e_3 + C_3 + e_4 + C_4}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}$$

e

$$t_m = \frac{t_1 + C_1 + t_2 + C_2 + t_3 + C_3 + t_4 + C_4}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}$$

Os comprimentos dos lados são desiguais e os teores variam consideravelmente; os fatores médios são:

$$e_m = \frac{e_1 + a_1 + e_2 + a_2 + e_3 + a_3 + e_4 + a_4}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}$$

e

$$t_m = \frac{t_1 + a_1 + t_2 + a_2 + t_3 + a_3 + t_4 + a_4}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}$$

onde a_1, a_2, a_3, a_4 são as áreas de influência de cada escavação, encontradas pela regra de igual influência.

Quando a espessura do minério é maior que a largura da escavação e os blocos são desenvolvidos por travessas em dois níveis, as reservas podem ser computadas a partir dos dados das travessas, como será mostrado adiante para um bloco exposto em dois lados. Amostras de cabeceiras e subidas entre as travessas não são requeridas, se existirem evidências de continuidade do minério e uniformidade de teor. No caso de corpo irregular o bloco pode ser dividido em áreas de influência para verificar os resultados dos cálculos originais.

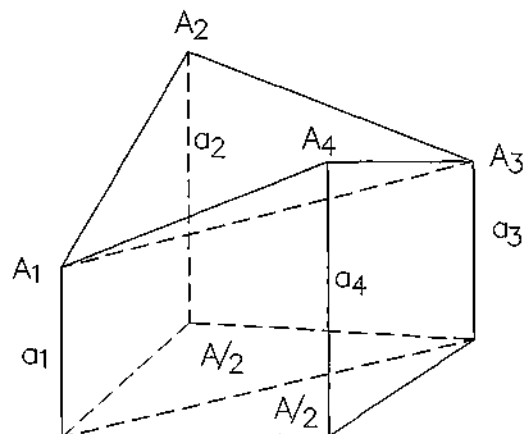
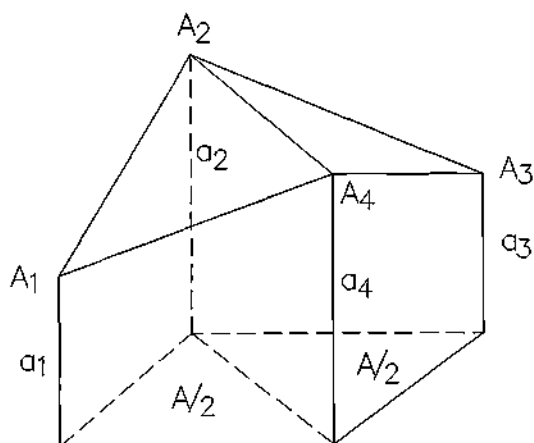


Fig. 3.27 Construção de dois prismas triangulares diferentes.

2º. Bloco exposto em três lados por escavação subterrânea

Os fatores médios são calculados similarmente ao dos casos prévios: (i) como média aritmética dos três lados (ignorado o comprimento das escavações); (ii) ponderando as variáveis de cada lado do bloco segundo o comprimento de cada escavação; (iii) calculando inicialmente os fatores para quarto lado por amostras dos extremos, nos lados existentes e, então, obtendo médias para todos os lados (isto faz aumentar a importância das amostras de extremos em comparação com outras e (iv) ponderando-se as áreas de influência de cada uma das três escavações.

Um bloco delineado por um adito, subida e trabalhos de superfície (trincheiras e poços) é um caso especial, (Figura 3.29). Pode também ser subdividido em blocos baseados em evidências geológicas, tais como grau de alteração do minério, espessura, teor, zoneamento ou número de observações (Figura 3.30).

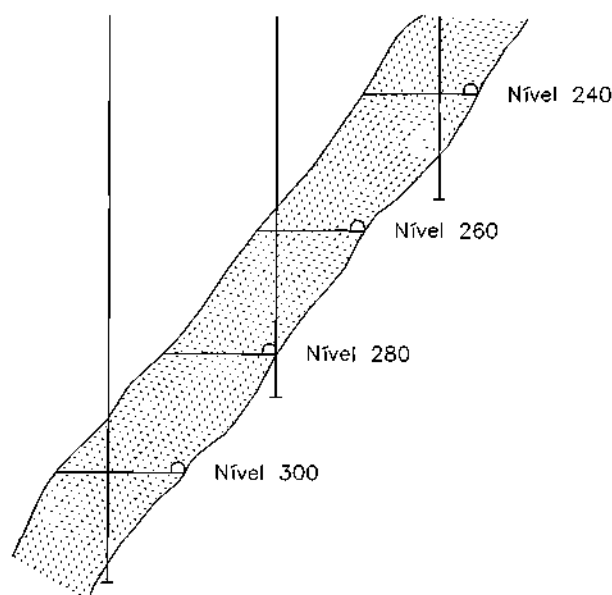


Fig. 3.28 Seção geológica transversal a corpo de minério com blocos de mineração assinalados por níveis equidistantes de 20m.

3º. Bloco exposto em dois lados

(a) *Escavações em dois níveis.* Quando um bloco de mineração é desenvolvido em dois níveis (Figura 3.31), os fatores médios para cada nível são inicialmente determinados. Em corpos uniformes os fatores para o bloco são calculados como a média, dos níveis; por outro lado podem ser calculados como médias ponderadas das áreas dos níveis.

(b) *Escavações interceptantes.* Um bloco desenvolvido em dois lados por escavações interceptantes, mostra, por exemplo, cabeceiras e subidas, formando um prisma triangular. Os fatores de bloco são determinados como a média das escavações, como a média ponderada do comprimento das mesmas ou como a média ponderada das áreas, com áreas de influência determinadas pela regra da igual influência.

No primeiro e segundo exemplos, os volumes são calculados como o produto da espessura (e_m) e áreas (A) médias; no terceiro exemplo como a soma de dois blocos auxiliares, cada um calculado como o produto da espessura média da escavação pela sua área de influência.

Quando a espessura do corpo mineral é maior que a largura da escavação, o bloco de mineração pode ser desenvolvido em ambos os níveis por travessas ou por travessas e cabeceiras. No primeiro exemplo as reservas são calculadas com dados da travessa, pelo método da seção vertical. Quando as amostras da cabeceira entre travessas são disponíveis, os fatores e a reserva da área podem ser calculados pela regra da influência igual, para cada nível. As reservas do bloco são computadas por uma das formulas discutidas na seção dedicada ao método das seções.

4º. Bloco exposto em um nível, interceptado por sondagem

Um corpo mineral exposto por escavação em um nível e cortado em profundidade por um ou mais furos de sonda, pode ser dividido em blocos de mineração utilizando as interseções do furo e as escavações.

Os limites dos blocos podem ser determinados com base em critérios geológicos, como zoneamento ou

Tabela 3.4. Determinação da média aritmética dos fatores para blocos individuais

Bloco	Nome da obra	Espessura (e) ¹ m	Teor (t) ² %
1	Cabeceira AB Subida A'B' Cabeceira AA' Subida BB'	e'_1 e'_2 e'_3 e'_4	t'_1 t'_2 t'_3 t'_4
Total		$\sum_{i=1}^4 e'_i$	$\sum_{i=1}^4 t'_i$
Média		$e'_m = \sum_{i=1}^4 e'_i / 4$	$t'_m = \sum_{i=1}^4 t'_i / 4$
2	Cabeceira A¹ B¹ Subida A² B² Cabeceira A¹ B² Subida B¹ B²	e''_1 e''_2 e''_3 e''_4	t''_1 t''_2 t''_3 t''_4
Total		$\sum_{i=1}^4 e''_i$	$\sum_{i=1}^4 t''_i$
Média		$e''_m = \sum_{i=1}^4 e''_i / 4$	$t''_m = \sum_{i=1}^4 t''_i / 4$

1. determinado como espessura média aritmética;

2. determinado como média aritmética ou ponderado pela espessura ou pela área.

Tabela 3.5. Recursos ou reservas (por classes) e determinação do teor médio

Bloco	Área (A) m ²	Espessura média (e _m) m	Volume da matéria prima (V), em m ³	Densidade	Reservas da m.p. (Q) ton.	Componente valioso	
						Teor médio (t _m), %	Reservas (P) ton.
1	A ₁	e' _m	V ₁	d	Q ₁	t' _m	P ₁
2	A ₂	e'' _m	V ₂	d	Q ₂	t'' _m	P ₂
...	...	...	...	...	...	...	...
N	A _n	e ⁿ _m	V _n	d	Q _n	t ⁿ _m	P _n
Total	$\sum_{i=1}^n A$		$\sum_{i=1}^n V$		$\sum_{i=1}^n Q$		$\sum_{i=1}^n P$
Média		$\frac{\sum_{i=1}^n V}{\sum_{i=1}^n A}$				$\frac{\sum_{i=1}^n P}{\sum_{i=1}^n Q}$	

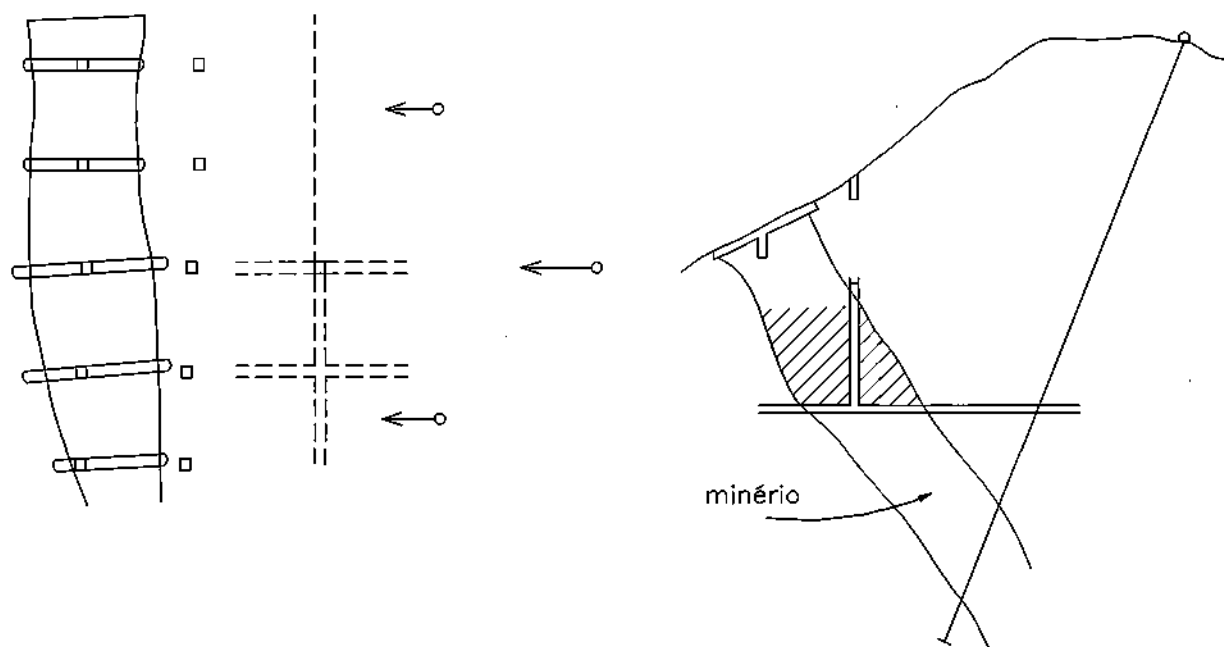


Fig. 3.29 Bloco definido a partir de trabalhos de superfície e subterrâneos.

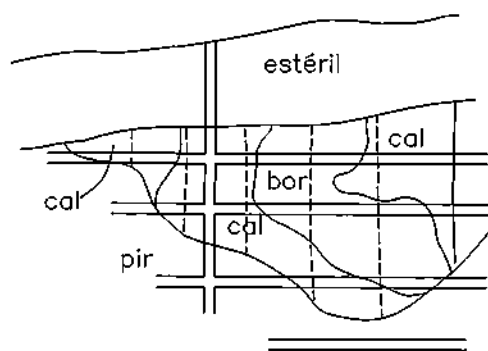


Fig. 3.30 Zona com sulfetos dividida em blocos de mineração. cal = calcopirita, pir = pirita, bor = bornita.

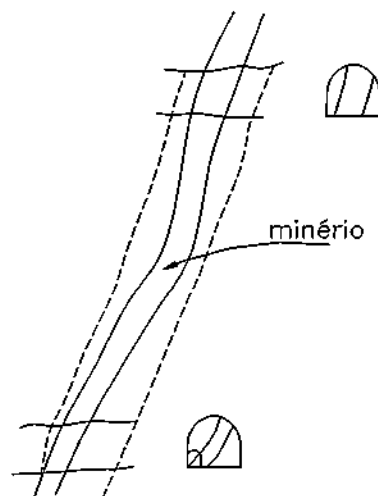


Fig. 3.31 Bloco de mineração exposto em dois lados. Escavação em dois níveis.

obliquidade da mineralização, ou com base projeto de lavra e economicidade. Se a espessura e teor do corpo são uniformes, os fatores do bloco são calculados por:

$$e_m = \frac{e_1 \cdot C_1 + e_2 \cdot C_2}{C_1 + C_2} \quad e \quad t_m = \frac{t_1 \cdot C_1 + t_2 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$

onde e_1 e t_1 são espessura e teor médios em cada bloco no nível da cabeceira, e_2 e t_2 são espessura e teor médios em cada um dos dois furos adjacentes que limitam o lado do bloco e C_1 e C_2 são os comprimentos dos blocos em cada nível.

Quando um grande número de amostras é disponível em uma cabeceira, a informação do furo comumente serve apenas para delinear o bloco e avaliar a mineralização. Se cada observação, tanto da cabeceira quanto do furo, é considerada em uma base igual, o cálculo da espessura e teor médios é feito por fórmulas.

No exemplo de furos numerosos teríamos:

$$e_m = \frac{e_1 + e_2 + \dots + e_n + e'_1 + e'_2 + \dots + e'_m}{n + m}$$

e

$$t_m = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_n + t'_1 + t'_2 + \dots + t'_m}{n + m}$$

Com apenas um furo tem-se:

$$e_m = \frac{e_1 + e_2 + \dots + e_n + e'_1}{n + 1}$$

e

$$t_m = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_n + t'_1}{n + 1}$$

onde:

$e_1, e_2, \dots, e_n$ são espessuras observadas na cabeceira

$t_1, t_2, \dots, t_n$ são os teores correspondentes

$e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ são espessuras observadas nos furos

$t'_1, t'_2, \dots, t'_m$ são os teores correspondentes

n é o número de amostras na cabeceira

m é o número de furos

Com o objetivo de aplicar o método é preciso desenvolver o corpo e blocos (de extração), a partir de uma suficiente distribuição de escavações. Em geral,

as reservas são estimadas para corpos uniformes de classes mais elevadas, isto é, provadas ou semiprovadas. Os cálculos são relativamente simples. As reservas dos blocos podem ser classificadas com objetivo de lavra, segundo espessura, teor, custo e extração. Assim, o método permite controlar a qualidade e o custo da produção.

O método é flexível e pode ser usado em todos os tipos de depósitos minerais. O grau do erro depende, em grande parte, do tipo genético do depósito, da densidade das escavações e da sua distribuição. É naturalmente adaptável a camadas sedimentares (como carvão), a veios verticais ou quase verticais, de espessura fina a média, e a corpos tabulares finos, nos quais o teor e espessura sofrem variações graduais e os aspectos geológicos e de mineração são similares aos blocos já extraídos. Quando as médias ponderadas podem ser eliminadas, é uma operação simples.

Em corpos falhados ou interrompidos, ou naqueles em que os teores são erráticamente distribuídos, o erro relativo pode ser muito elevado e o método não é recomendável.

Determinação do peso

Fator tonelagem

A conversão de volume em tonelagem depende do sistema de medidas, que é empregado:

$$T = V \cdot F \quad e \quad Q = V \cdot f$$

onde F é o fator volume x tonelagem, expressado em metros cúbicos por tonelada; f é o fator tonelagem x volume, expressado em unidades de peso por metro cúbico.

Ambos os fatores são interrelacionados e são determinados com base em produção passada e em extração experimental ou adaptados de depósitos similares. Podem, também, ser determinadas por medida de escavações ou por testes de laboratório. As técnicas para se fazer os determinações são descritas em publicações diversas.

Em muitos depósitos a densidade varia substancialmente, em função da composição mineralógica e do teor. As relações entre massa e teor podem ser expressadas graficamente, de modo que a densidade pode ser determinada para teores apropriados, para cada bloco individual.

A tonelagem do bloco total corresponde a:

$$T = T_1 + T_2 + \dots + T_n = V_1 f_1 + V_2 f_2 + \dots + V_n f_n$$

Densidade

A conversão do volume em tonelagem métrica é feita pela expressão $T = VD$, onde D é a densidade do material.

A densidade (adimensional, por definição) pode ser determinada por testes diretos em amostras secas e moídas. A densidade *in situ* ou densidade rochosa natural é expressada por:

$$D = \frac{D_i(1 - P_0)}{1 - U_0}$$

onde D é a densidade do material seco, P_0 é a porosidade, em percentagem, por unidade de volume e U_0 é a unidade de peso perdida com a secagem.

É comum (mas não é correto) considerar a densidade de um minério como independente do teor e constante. Minérios são mais densos em função do teor mais elevado. Se o teor é muito baixo ou pouco variável, não se considera importante examinar o efeito do teor sobre a densidade. Se o teor e a variação são elevados, a questão é importante e para se calcular a tonelagem, devendo ser feita ponderação do teor pela densidade.

Determinação do teor

O cálculo do teor de um corpo mineral é uma operação crítica e importante e é feito por:

- Média aritmética
- Média ponderada por largura ou espessura
- Média ponderada por largura e área
- Média ponderada por frequência de ocorrência
- Média ponderada pelo quadrado da frequência
- Média estimada por estatística ou por geoestatística

A obtenção de teores de boa qualidade não depende apenas da preparação das amostras e dos métodos analíticos; de igual importância é a amostragem que incide sobre depósito de diferentes tipos e as práticas estatísticas e geoestatísticas na avaliação dos dados e cálculo dos teores médios. A amostragem depende do tipo de depósito e a avaliação por meio de métodos geomatemáticos também é influenciada pelo tipo de depósito.

Em outro trabalho pretende-se desenvolver o tema e apenas observações gerais sobre os métodos convencionais de cálculo do teor serão apresentadas aqui. As fórmulas para cálculo do teor médio são:

- Média aritmética (blocos iguais em área, espessura e densidade):

$$t_m = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_n}{n}$$

- Média ponderada pela espessura (blocos iguais em área e densidade):

$$t_m = \frac{t_1 e_1 + t_2 e_2 + \dots + t_n e_n}{e_1 + e_2 + \dots + e_n}$$

- Média ponderada pela área (blocos iguais em espessura e densidade):

$$t_m = \frac{t_1 A_1 + t_2 A_2 + \dots + t_n A_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n}$$

A ponderação por volume ou por tonelagem tem a mesma equação da ponderação por área, quando se substitui A_i por V_i ou por T_i .

A ponderação é o método de atribuir fatores a cada grupo de observações, de modo a representar seu valor relativo, quando comparado com outras observações da mesma sequência. Os valores utilizados nas ponderações incluem unidades de comprimento, de área, de volume e de tonelagem, com base nos princípios de interpretação, em especial na regra da área de influência, considerações geológicas, etc.

O uso da ponderação, em cada caso, depende da análise dos dados exploratórios. Na amostragem de um corpo mineral grande, a ponderação é necessária, para o cálculo do teor médio, utilizando a largura do corpo como fator de ponderação para pontos com valores metálicos diferentes.

Quando se tem corpo mineral com porções onde os valores são distribuídos ao acaso, nenhuma amostra tem uma área de influência, de modo que não cabe ponderar as amostras por área de influência.

Além dos métodos de ponderação aplicados aos blocos caracterizados pelo teor, pela espessura, etc, o teor de um depósito pode ser determinado por métodos estatísticos, envolvendo média, média geométrica, mediana e estimador de Sichel. A média geométrica ou moda é o valor que representa a frequência mais elevada e a mediana é o valor que divide a área sob a curva de distribuição dos valores em duas porções iguais, de modo que 50% dos valores estão de um lado da mediana e 50%, do outro.

O primeiro passo na estimativa estatística é a produção de um histograma de frequência, visando uma apreciação geral da distribuição, e sua "normalidade". Calcula-se a média aritmética e a variância (ou o desvio padrão). A forma da curva de distribuição é avaliada pela assimetria e pela curtose:

$$\text{Assimetria} = \left\{ \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3 \right\} \div s^3$$

onde $\bar{x}$ é a média, x_i são os valores individuais e s o desvio padrão, A assimetria mede o afastamento da população da simetria, valor positivo indica assimetria

positiva (isto é, excesso de valores elevados em relação a uma população normal). Se a distribuição é simétrica, a assimetria tem valor próximo de zero.

$$\text{Curtose} = \left\{ \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4 \right\} \div V^2$$

onde $\bar{x}$ é a média, x_i são os valores individuais e V a variância. O grau de curtose define quão aguda é a distribuição em relação à população normal (gaussiana). Para a população normal, o valor aproxima-se de 3.

Quando os dados conformam-se a uma população normal, a média aritmética ou o valor do percentil 50 (mediana) é usado como estimador do teor.

O coeficiente de variação CV (desvio padrão + média) x 100 reflete o grau de dispersão relativa ao redor da média. Segundo Koch & Link (1970, p. 54), o coeficiente de variação "é uma importante medida para estimar a variabilidade". Os geólogos da escola soviética de exploração mineral usam o CV como meio de classificar os depósitos para efeito de pesquisa. Os depósitos são divididos em quatro grupos e têm as seguintes variabilidades (ver Kreiter, 1968 e Bohmer, 1976):

a) Grupo Regular: depósitos sedimentares de carvão, folhelho oleífero, calcário para cimento, salgema, fosforitos, parte dos depósitos de ferro e manganês, depósitos magmatogênicos e metamorfogênicos simples. A variabilidade é regular e o CV para a espessura e para o teor é < 50 e < 40, respectivamente.

b) Grupo Irregular: grande parte dos depósitos de cobre, de minérios complexos não ferrosos, de depósitos endógenos não metálicos, de alguns depósitos de tungstênio, molibdênio e ouro primário. A variabilidade é usualmente aleatória e o CV para a espessura e o teor é 30 – 80 e 40 – 100, respectivamente.

c) Grupo Muito Irregular: alguns depósitos complexos. A maior parte dos depósitos de W e Mo. Alguns depósitos de ouro. Quase todos os depósitos de metais raros e preciosos, em veios. Depósitos não ferrosos com morfologia complexa e tectônica perturbada. Alguns depósitos endogênicos

não metálicos. Variabilidade aleatória, CV entre 50 – 100 (espessura) e entre 100 – 150 (teor).

d) Grupo Extremamente Irregular: a maioria dos depósitos de ouro e de metais raros. Depósitos pequenos ou muito perturbados, com distribuição complexa dos constituintes úteis; variabilidade aleatória, CV entre 80 – 150 (espessura) e 130 – 300 (teor).

A classificação dos depósitos segundo sua variabilidade mostra que para valores crescentes de CV, os teores são decrescentes; valores extremos de CV são encontradas com depósitos de ouro e de metais raros, que têm teores médios baixos. Os menores valores de CV são encontrados em depósitos sedimentares (e equivalentes metamorfoseados) de carvão, calcário, etc.

Com base nos dados relativos aos grupos diferentes de depósitos e aos coeficientes de variação pode-se admitir:

1º) Depósitos com valores de CV < 50 têm atributos cuja frequência segue a lei normal.

2º) Para CV > 100 a distribuição não segue a lei normal (gaussiana).

3º) Entre 50 e 100 de valor do CV, ora o arranjo segue a lei normal, ora não segue.

O coeficiente de variação expressa o grau de variabilidade do atributo sob exame e não reflete o carácter.

Para a distribuição normal $CV = s / \bar{x} \cdot 100$, onde s é o desvio padrão e $\bar{x}$, a média. No caso lognormal,

$CV = (10^{s_{\log}^2} - 1)^{1/2}$, onde $s_{\log}^2$ é a variância dos logaritmos comuns dos conteúdos, isto é,

$$s_{\log}^2 (N-1) \sum_{i=1}^n (\log x_i - \log \bar{x})^2, N \text{ é o número de}$$

determinações, $\log x_i$ é um valor do logaritmo do conteúdo e $\log \bar{x}$ é o valor médio dos logaritmos dos conteúdos.

Para uma população ser considerada normal, o CV deve ser menor que 50% (cinquenta por cento). Valores maiores indicam dados distribuídos lognormalmente ou erráticamente. Entretanto, é necessário comentar que o valor do CV tem relação com o tamanho da amostra, pois a

variância dos conteúdos decresce inversamente ao tamanho da mesma, e quando porções de alto teor são incorporadas, aumenta o volume da amostra e modifica-se a média.

Quando a população é assimétrica positivamente, é conveniente transformar os dados para valores logaritmos. Em seguida um histograma deve ser construído, de modo que se possa verificar o formato do mesmo.

Graficamente os valores da média e do desvio padrão podem ser estimados, conforme o seguinte procedimento (Grossi Sad, 1986):

Na figura 3.32 faz-se o registro gráfico para verificar a lei de distribuição de 424 amostras de solo rico em TiO_2 derivado de silicocarbonatito. Usa-se papel de probabilidade normal de modo que o registro da frequência acumulada produz uma linha reta. A frequência acumulada é substituída por uma percentagem de registro (o papel mostra até 99,99% de frequência). A percentagem do registro corresponde a $Pr = 100 \times 3 (fa - 1) / 3N + 1$ onde fa é a frequência acumulada e N o número de amostras.

A média das observações é estimada lendo o ponto do percentil 50, na linha reta de adaptação, obtendo-se o valor 10,49% (o valor calculado é 10,40%). O desvio padrão é estimado subtraindo-se o percentil 16% (6,16%) do percentil 84% (14,72%) e dividindo-se a diferença por 2. Obtem-se 4,28 (valor calculado igual a 4,2844).

Para o caso da distribuição logarítmica normal tem-se:

a) Média dos logaritmos

$$\ln \mu = 1 / N \sum_{i=1}^n \ln x_i \cdot n_i$$

b) Variância e desvio padrão

$$\sigma_{\ln}^2 = 1 / N - 1 \cdot \sum_{i=1}^n (\ln x_i - \ln \mu)^2 n_i$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{\ln}^2}$$

c) Coeficiente de variação

$$CV_{\ln} = \sqrt{e^{\sigma_{\ln}^2} - 1}$$

d) Assimetria e curtose

3. Cálculos para a determinação dos parâmetros dos corpos minerais

$$A_{\ln} = \frac{\sum_{i=1}^n (\ln x_i - \ln \mu)^3 n_i}{N \cdot \sigma_{\ln}^3}$$

$$E_{\ln} = \frac{\sum_{i=1}^n (\ln x_i - \ln \mu)^4 \cdot n_i}{N \cdot \sigma_{\ln}^4} - 3$$

e) Condições para distribuição lognormal

$$\frac{A_{\ln}}{\sqrt{6/N}} \leq 3 \quad \frac{E_{\ln}}{2\sqrt{6/N}} \leq 3$$

A verificação de lei distribuição lognormal pode ser feita graficamente, conforme Fig. 3.33. As percentagens do registro são as da fórmula $[3(fa) - 1 + N + 1] / 100$. Na figura citada tem-se o valor da mediana, no percentil 50 (o valor calculado é igual a $\log \mu = 0,646$, enquanto é valor do percentil é 0,6); o desvio padrão calculado é de $S_{\log} = 0,1159$; usando os percentis de 84 e 16 da figura, obtemos 0,1. Os valores calculados foram tomados de Grossi Sad, 1986, Tabela 5.10, p. 73.

Para a grande maioria dos depósitos minerais de baixo teor, a distribuição dos conteúdos não se faz de modo simétrico, como na lei de Gauss e, sim, de modo lognormal, com assimetria positiva (ver curva b na Figura 3.34).

Se x é a variável com distribuição assimétrica e $\ln x$ é a variável com distribuição normal, dizemos que a distribuição de x é lognormal com dois parâmetros. Se $\ln(x + \beta)$ é uma variável normal, onde β é uma constante, dizemos que a distribuição de x é lognormal com três parâmetros. Em um histograma, x mostra uma distribuição assimétrica positiva, $\ln x$ tem distribuição assimétrica negativa e $\ln(x + \beta)$ se arranja segundo distribuição simétrica.

Quando a variável é triparamétrica lognormal, a curva cumulativa do seu registro gráfico mostra um excesso de valores baixos (Rendu, 1981), e, por isso o registro não corresponde a uma linha reta, como mostrado na Figura 3.33.

Tabela 3.6. Distribuição de uma Variável Triparamétrica Lognormal (segundo Rendu, 1981)

Limite superior dos valores (em g)	Número de amostras (acumuladas)	Frequência acumulada (%)
4	50	5
7	60	6
12	80	8
29	120	12
46	180	18
80	250	25
120	350	35
180	500	50
280	680	68
450	820	82
800	930	93
1200	980	98
∞	1.000	100

Um exemplo da estimativa dos parâmetros de uma variável triparamétrica lognormal, a partir do registro gráfico, é dado a seguir e é reproduzido de Krige (1981) e Rendu (1981). Na Tabela 3.6 são registrados os conteúdos (teor de ouro em cm g) de interesse, graficamente reproduzidos na Figura 3.35 (ver curva C_1).

A distribuição lognormal triparamétrica de uma variável x é definida pela constante aditiva β , pela variância logarítmica de $(x + \beta)$ e pela média logarítmica de $(x + \beta)$. Se o número de amostras for suficientemente grande, (o que acontece no caso dos dados da Figura 3.35), tem-se:

$$\frac{m^2 - f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2 - 2m}$$

onde m é o valor correspondente a 50% da frequência (isto é, a mediana da distribuição) e f_1 e f_2 são os valores correspondentes à frequência p e $p-1$, respectivamente. Em princípio, qualquer valor de p pode ser usado, mas valores entre 5 e 20% fornecem melhor resultado.

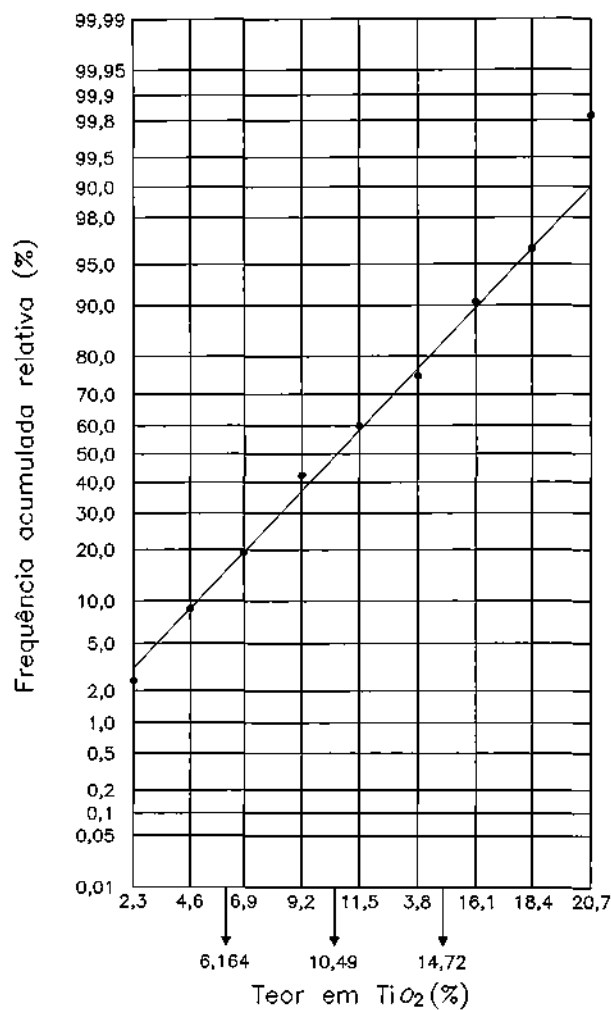


Fig. 3.32 Registro em papel de probabilidade para distribuição normal (segundo Grossi Sad, 1986, Tabela 5.7, Figura 5.13).

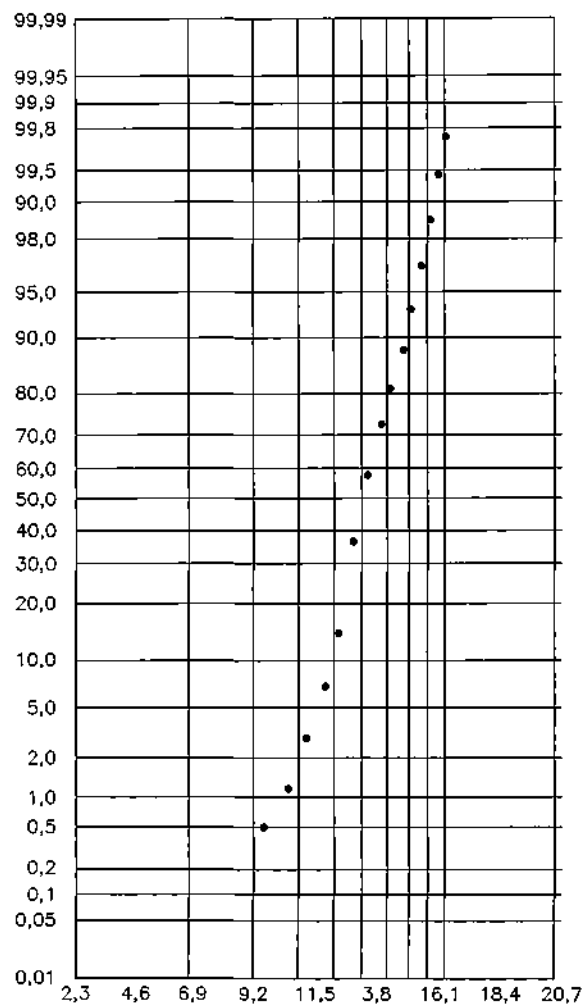


Fig. 3.33 Registro, em papel logarítmico de probabilidade (segundo Grossi Sad, 1986, tabela 5.10, pag. 73).

Na Figura 3.35, $m = 180$ e para $p = 15\%$, $f_1 = 37$ e $f_2 = 510$, o que produz para β um valor igual a 72 cm g. Como β é muito sensível ao valor de p , é necessário verificar graficamente se a distribuição $(x + \beta)$ é lognormal (curva C_2 da Figura 3.35).

Quando o número de amostras é pequeno, não se pode estimar β de um gráfico como o da Figura 3.35. Nesse caso, ou se toma $\beta = 0$ ou se adota um valor de β conhecido em um depósito similar.

A estimativa da média, da variância e dos limites de confiança é feita do modo seguinte (Rendu, 1981):

a) Conhecido β , podemos escrever $y_i = I_n(x_i + \beta)$, onde a média logarítmica de $(x + \beta)$ é

$$\bar{y} = 1/N \sum_{i=1}^n y_i. \text{ A média geométrica } m \text{ de } x + \beta$$

é estimada por $\hat{m} = \exp(\bar{y})$.

b) A variância logarítmica $\sigma_{\ln}^2$ de y é estimada por:

$$V(y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n y_i^2 - (\bar{y})^2$$

c) A média μ de uma variável lognormal triparamétrica é relacionada à média geométrica m e a variância $\sigma_{\ln}^2$ pela expressão:

$$\mu = m [\exp(\sigma_{\ln}^2/2)] - \beta$$

Quando se dispõe apenas das estimativas $\hat{m}$ de m e $V(y)$ de $\sigma_{\ln}^2$, um estimador de máxima conformidade de $(\mu + \beta)$ pode ser tirado das tabelas de Sichel, parte das quais é reproduzida na Tabela 3.7. Dado o número de amostras N e a variância $V(y)$, um fator $\gamma_N(V)$ é lido nas tabelas.

O valor médio é estimado por $\hat{\mu} = \hat{m} \gamma_N(V) - \beta$

Para $N > 1.000$, usa-se $\gamma_{\infty}(V) = \exp(V/2)$.

Um exemplo de uso das tabelas é dado a seguir: sejam $N = 10$ e $V = 1,40$; da Tabela 3.7, tem-se:

$$\gamma_N(V) = 1,936$$

d) Para se estimarem os limites de flutuação dos conteúdos podemos usar as tabelas de Sichel - Wainstein,

parcialmente reproduzidas nas tabelas 3.8 e 3.9. Desejamos calcular o valor limite de μ_p , de modo que a probabilidade de μ ser menor que μ_p é p . Das tabelas e dos valores de p , N e $V(y)$, obtém-se um fator de multiplicação $\Psi_p(V;N)$. Deduz-se

$$\mu_p = (\hat{\mu} + \beta) \Psi_p(V;N) - \beta$$

Para $N > 1000$, $\Psi_p(V;N) = \exp(\sigma_{\ln}^2/2 + t_p \sigma_{\ln})$, onde $\sigma_{\ln}^2 = V/N (1 + V/2)$ e t_p é obtido da Tabela 3.8.

Para $p = 0,95$, $t_p = 1,645$ e para $p = 0,05$ $t_p = -1,645$. Exemplo: para $p = 0,95$, $N = 10$ e $V = 1,40$, tem-se, da Tabela 3.8: $\Psi_p(V;N) = 3,761$.

A estimativa gráfica dos parâmetros da distribuição longnormal triparamétrica é feita a seguir (Rendu, 1981).

Seja uma variável lognormal x com mediana $m=100$ e variância logarítmica $\sigma_{\ln}^2 = 1,00$. Sobre papel de probabilidade logarítmico, a distribuição cumulativa de x é uma linha reta passando pelos pontos:

A: frequência acumulada = 0,50

limite superior do valor = $m = 100$

B: frequência acumulada = 0,97725 [3]

limite superior do valor = $m \exp(\sigma_{\ln}) = 738,9$

Esta linha está registrada na Figura 3.36. O declive da linha é função de $\sigma_{\ln}^2$ apenas. Fazendo m constante e variando $\sigma_{\ln}^2$, obtemos diferentes linhas passando por A e podemos registrar os valores correspondentes da variância sobre uma escala mostrada na margem da figura.

A média de x é dada pela expressão

$$\mu = m \left[\exp(\sigma_{\ln}^2/2) \right] - \beta. \text{ Para } m = 100 \text{ tem-se}$$

$\sigma_{\ln}^2 = 1,00$, obtém-se valor de $\mu = 164,9$.

Seja $p\mu = \text{Prob}(x < \mu)$. Na Figura 3.36, dados μ e a linha de distribuição cumulativa, lemos $p\mu = 69,5\%$. Se variarmos

[3] Se x é uma variável normal com média μ e variância σ^2 , tem-se que $\text{Prob}(x < \mu) = 50\%$; $\text{Prob}(x < \mu - 2\sigma) = 0,02275$ e $\text{Prob}(x < \mu - 2\sigma) = 0,97725$.

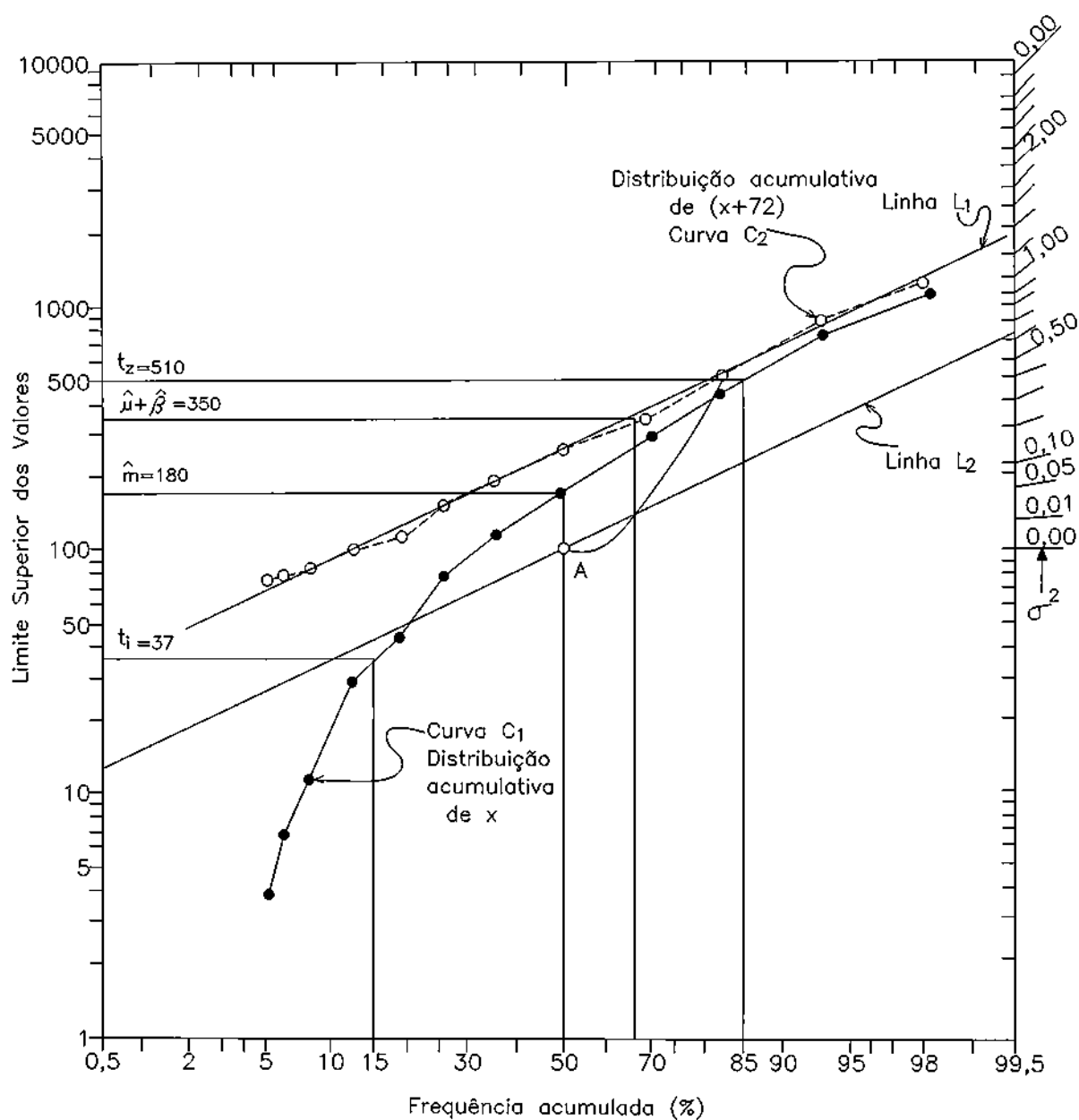


Fig. 3.35 Distribuição gráfica triparamétrica lognormal da Tabela 3.6 (segundo Rendu, 1981).

σ^2_{ln} , deixando $m = 100$, o ponto M com coordenadas (p_M, μ) descreverá uma curva que será o lugar geométrico da média.

Seja a variável reportada na Tabela 3.6. Para estimar a média e a variância, procedemos como se faz a seguir:

a) Construir a distribuição cumulativa observada de x , que corresponde à curva C_1 da Figura 3.35.

b) Estimar β pela fórmula dada acima. Seja $\hat{\beta}$ a estimativa de β .

c) Construir a distribuição cumulativa de $(x + \beta)$, que é a curva C_2 da Figura 3.35.

d) Adaptar uma linha reta L_1 à curva C_1 .

e) Construir a linha L_2 paralela a L_1 , passando por A , que foi usado para construir a escala da variância e o lugar geométrico da média.

f) Ler a variância logarítmica na escala adequada (isto é, $\sigma^2 = 0,64$).

g) Projetar a interseção de L_2 com o lugar geométrico da média, sobre a linha L_1 e determinar a média:

$$\hat{\mu} + \hat{\beta} = 350 \quad \hat{\mu} = 350 - 72 = 278$$

Note-se que os limites de confiança precisos não podem ser obtidos dessas estimativas, mas, na prática, a equação $\mu p = (\mu + \beta) \Psi p(V; N) - \beta$ pode ser usada, substituindo-se σ^2_{ln} por V .

Exemplo: Sejam os oito seguintes dados de teor, obtidos de um corpo mineral: 1,2; 2,0; 1,6; 1,7; 2,5; 1,9; 1,5; 2,1. Admitindo que x tenha uma distribuição biparamétrica ($\beta = 0$), estimar a média μ do corpo e fornecer os limites de confiança para 90% de probabilidade. Na Tabela 3.10 são calculados a média e a variância logarítmicas.

Podemos obter:

$$\bar{y} = 4,581/8 = 0,573$$

$$\hat{m} = \exp(y) = 1,774$$

$$V(y) = 2,983 - (0,573)^2 = 0,0445$$

Usando a Tabela 3.7, obtermos, por interpolação, entre os pontos $V = 0,04$ e $V = 0,06$, (para $N = 8$):

$$\gamma^s(V) = 1,022$$

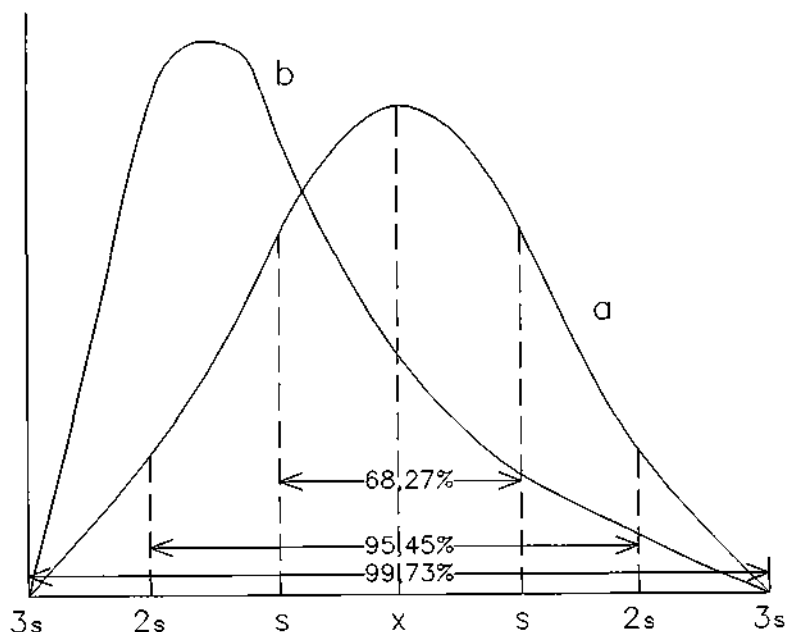


Fig. 3.34 Curvas de distribuição normal e lognormal.

Tabela 3.10. Cálculo da média e da variância dos dados apresentados no texto

x_i	$y_i = \ln(x_i)$	y_i^2
1,2	0,182	0,033
2,0	0,693	0,481
1,6	0,470	0,221
1,7	0,531	0,282
2,5	0,916	0,840
1,9	0,642	0,412
1,5	0,405	0,164
2,1	0,742	0,550
$\Sigma = 4,581$		$\Sigma = 2,983$

Portanto, a estimativa da média é:

$$\hat{\mu} = 1,774 \times 1,022 = 1,830$$

Os limites de flutuação, para 90% de probabilidade são:

$$A_{\max}: \mu_{0,95} = \mu \Psi_{0,95}(V;N)$$

$$A_{\min}: \mu_{0,05} = \mu \Psi_{0,05}(V;N)$$

Usando as tabelas 3.8 e 3.9, obtemos, por interpolação linear entre os pontos $V = 0,04$ e $V = 0,06$, para N entre 5 e 10:

$$\Psi_{0,95}(V;N) = 1,263$$

$$\Psi_{0,05}(V;N) = 0,883$$

Portanto, com uma probabilidade de 90%, os valores verdadeiros encontram-se entre:

$$A_{\max}: 1,263 \times 1,830 = 2,311 \text{ e}$$

$$A_{\min}: 0,883 \times 1,830 = 1,611$$

3. Cálculos para a determinação dos parâmetros dos corpos minerais

Tabela 3.7. Fator $\gamma_N(V)$ para estimar a Média da População Lognormal. Exemplo: $\gamma_G(0,20) = 1,104$

$\frac{N}{V}$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20	50	100	1000
0,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,02	1,010	1,010	1,010	1,010	1,010	1,010	1,010	1,010	1,010	1,010	1,010	1,010	1,010	1,010	1,010	1,010	1,010
0,04	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020
0,06	1,030	1,030	1,030	1,030	1,030	1,030	1,030	1,030	1,030	1,030	1,030	1,030	1,030	1,030	1,030	1,030	1,030
0,08	1,040	1,040	1,040	1,040	1,040	1,040	1,040	1,040	1,040	1,040	1,040	1,040	1,040	1,040	1,040	1,040	1,040
0,10	1,050	1,051	1,051	1,051	1,051	1,051	1,051	1,051	1,051	1,051	1,051	1,051	1,051	1,051	1,051	1,051	1,051
0,12	1,061	1,061	1,061	1,061	1,061	1,061	1,061	1,061	1,061	1,062	1,062	1,062	1,062	1,062	1,062	1,062	1,062
0,14	1,071	1,071	1,071	1,071	1,072	1,072	1,072	1,072	1,072	1,072	1,072	1,072	1,072	1,072	1,072	1,072	1,072
0,16	1,081	1,082	1,082	1,082	1,082	1,082	1,082	1,083	1,083	1,083	1,083	1,083	1,083	1,083	1,083	1,083	1,083
0,18	1,091	1,092	1,092	1,092	1,093	1,093	1,093	1,093	1,093	1,094	1,094	1,094	1,094	1,094	1,094	1,094	1,094
0,20	1,102	1,102	1,103	1,103	1,104	1,104	1,104	1,104	1,104	1,104	1,104	1,104	1,104	1,105	1,105	1,105	1,105
0,3	1,154	1,156	1,157	1,158	1,158	1,159	1,159	1,159	1,160	1,160	1,160	1,160	1,160	1,161	1,161	1,162	1,162
0,4	1,207	1,210	1,212	1,214	1,215	1,216	1,216	1,217	1,217	1,218	1,218	1,219	1,219	1,219	1,220	1,221	1,221
0,5	1,260	1,266	1,269	1,272	1,273	1,275	1,276	1,276	1,277	1,278	1,279	1,279	1,280	1,280	1,282	1,283	1,284
0,6	1,315	1,323	1,328	1,332	1,334	1,336	1,337	1,338	1,339	1,341	1,342	1,343	1,344	1,344	1,348	1,349	1,350
0,7	1,371	1,382	1,389	1,393	1,397	1,399	1,401	1,403	1,404	1,406	1,408	1,409	1,410	1,411	1,416	1,417	1,419
0,8	1,427	1,442	1,451	1,457	1,462	1,465	1,468	1,470	1,472	1,475	1,477	1,478	1,480	1,481	1,487	1,490	1,492
0,9	1,485	1,503	1,515	1,523	1,529	1,533	1,537	1,540	1,542	1,546	1,549	1,551	1,552	1,554	1,562	1,565	1,568
1,0	1,543	1,566	1,580	1,591	1,598	1,604	1,608	1,612	1,615	1,620	1,623	1,626	1,628	1,630	1,641	1,645	1,649
1,1	1,602	1,630	1,648	1,661	1,670	1,677	1,682	1,687	1,691	1,697	1,701	1,705	1,708	1,710	1,723	1,728	1,733
1,2	1,662	1,696	1,718	1,733	1,744	1,752	1,759	1,765	1,770	1,777	1,782	1,787	1,790	1,793	1,810	1,816	1,822
1,3	1,724	1,764	1,789	1,807	1,820	1,831	1,839	1,846	1,851	1,860	1,867	1,872	1,876	1,880	1,900	1,908	1,916
1,4	1,786	1,832	1,862	1,884	1,900	1,912	1,922	1,930	1,936	1,947	1,955	1,961	1,966	1,971	1,995	2,004	2,014
1,5	1,848	1,903	1,938	1,963	1,981	1,996	2,007	2,017	2,025	2,037	2,047	2,054	2,060	2,065	2,095	2,106	2,117
1,6	1,912	1,975	2,015	2,044	2,066	2,082	2,096	2,107	2,116	2,131	2,142	2,151	2,158	2,164	2,199	2,212	2,226
1,7	1,977	2,049	2,095	2,128	2,153	2,172	2,188	2,201	2,212	2,229	2,242	2,252	2,260	2,267	2,308	2,323	2,340
1,8	2,043	2,124	2,177	2,214	2,243	2,265	2,283	2,298	2,310	2,330	2,345	2,357	2,367	2,375	2,422	2,440	2,460
1,9	2,110	2,201	2,260	2,303	2,336	2,361	2,382	2,399	2,413	2,436	2,453	2,467	2,478	2,487	2,542	2,563	2,586
2,0	2,178	2,280	2,347	2,395	2,431	2,460	2,484	2,503	2,519	2,545	2,565	2,581	2,594	2,604	2,668	2,692	2,718
2,1	2,247	2,360	2,435	2,489	2,530	2,563	2,589	2,611	2,630	2,659	2,682	2,700	2,714	2,726	2,800	2,827	2,858
2,2	2,317	2,442	2,526	2,586	2,632	2,669	2,698	2,723	2,744	2,778	2,803	2,824	2,840	2,854	2,937	2,969	3,004
2,3	2,388	2,526	2,618	2,686	2,737	2,778	2,811	2,839	2,863	2,900	2,929	2,952	2,941	2,987	3,082	3,118	3,158
2,4	2,460	2,612	2,714	2,788	2,846	2,891	2,928	2,959	2,986	3,028	3,060	3,086	3,108	3,125	3,233	3,274	3,320
2,5	2,533	2,699	2,812	2,894	2,957	3,008	3,049	3,084	3,113	3,160	3,197	3,226	3,250	3,270	3,391	3,438	3,490
2,6	2,607	2,789	2,912	3,003	3,073	3,128	3,174	3,213	3,245	3,298	3,339	3,371	3,398	3,420	3,557	3,610	3,669
2,7	2,682	2,880	3,015	3,114	3,191	3,253	3,304	3,346	3,382	3,441	3,486	3,522	3,552	3,577	3,730	3,791	3,857
2,8	2,759	2,973	3,120	3,229	3,314	3,382	3,437	3,484	3,524	3,589	3,639	3,680	3,713	3,740	3,912	3,980	4,055
2,9	2,836	3,068	3,228	3,347	3,440	3,514	3,576	3,627	3,671	3,743	3,799	3,843	3,880	3,911	4,102	4,178	4,263
3,0	2,914	3,166	3,339	3,469	3,570	3,651	3,718	3,775	3,824	3,902	3,964	4,013	4,054	4,088	4,301	4,387	4,482

(From H. S. Sichel, Journal of the South African Institute of Mining and Metallurgy, March 1966)

Tabela 3.8. Fator $\Psi_{0,95}$ (VN) para estimar o Limite Superior de Confiança
(com 95% de Probabilidade) de uma Média Lognormal

V \ N	5	10	15	20	50	100	1000
0,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,02	1,241	1,117	1,084	1,067	1,038	1,026	1,007
0,04	1,362	1,171	1,122	1,099	1,055	1,037	1,011
0,06	1,466	1,216	1,154	1,127	1,069	1,046	1,013
0,08	1,561	1,256	1,181	1,146	1,080	1,053	1,015
0,10	1,652	1,293	1,207	1,166	1,091	1,060	1,017
0,12	1,740	1,327	1,230	1,184	1,100	1,066	1,019
0,14	1,827	1,361	1,253	1,202	1,109	1,072	1,020
0,16	1,914	1,393	1,274	1,219	1,118	1,078	1,022
0,18	1,999	1,425	1,295	1,236	1,126	1,084	1,023
0,20	2,087	1,455	1,316	1,252	1,135	1,089	1,025
0,30	2,532	1,606	1,415	1,328	1,172	1,113	1,031
0,40	3,019	1,756	1,509	1,399	1,207	1,135	1,037
0,50	3,563	1,910	1,603	1,470	1,240	1,156	1,042
0,60	4,176	2,070	1,682	1,541	1,273	1,175	1,047
0,70	4,870	2,237	1,798	1,614	1,306	1,196	1,052
0,80	5,663	2,415	1,901	1,688	1,338	1,215	1,057
0,90	6,570	2,604	2,006	1,763	1,371	1,235	1,062
1,00	7,605	2,805	2,117	1,842	1,404	1,254	1,067
1,10	8,795	3,019	2,233	1,924	1,437	1,274	1,071
1,20	10,155	3,250	2,355	2,008	1,471	1,294	1,076
1,30	11,718	3,497	2,483	2,096	1,506	1,314	1,080
1,40	13,513	3,761	2,617	2,187	1,540	1,334	1,085
1,50	15,569	4,045	2,758	2,282	1,576	1,354	1,089
1,60	17,928	4,351	2,907	2,380	1,613	1,374	1,094
1,70	20,639	4,680	3,064	2,484	1,650	1,395	1,098
1,80	23,749	5,034	3,229	2,592	1,688	1,416	1,103
1,90	27,318	5,414	3,403	2,704	1,728	1,438	1,107
2,00	31,398	5,825	3,588	2,822	1,767	1,459	1,112
2,10	36,079	6,268	3,783	2,945	1,808	1,481	1,116
2,20	41,444	6,745	3,989	3,074	1,850	1,504	1,121
2,30	47,586	7,260	4,208	3,209	1,893	1,526	1,125
2,40	54,611	7,815	4,438	3,351	1,937	1,549	1,130
2,50	62,661	8,415	4,683	3,498	1,982	1,572	1,134
2,60	71,861	9,061	4,941	3,670	2,029	1,596	1,139
2,70	82,366	9,759	5,214	3,816	2,076	1,620	1,144
2,80	94,377	10,512	5,504	3,986	2,125	1,645	1,148
2,90	108,115	11,326	5,811	4,164	2,175	1,670	1,153
3,00	123,750	12,206	6,137	4,351	2,226	1,695	1,158

Example: $\Psi_{0,95}(1,60;15) = 2,907$ - (From H.S. Sichel, March 1966, and B.M. Wainstein, April 1975,
Journal of South African Institute of Mining and Metallurgy)

Tabela 3.9. Fator $\Psi_{0,05}$ (VN) para estimar o Limite Inferior de Confiança (com 95% de Probabilidade) de uma Média Lognormal

$\Psi_{0,05}$ \ N	5	10	15	20	50	100	1000
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,02	0,8978	0,9333	0,9458	0,9540	0,9697	0,9782	0,9927
0,04	0,8589	0,9071	0,9246	0,9344	0,9573	0,9692	0,9895
0,06	0,8302	0,8874	0,9079	0,9200	0,9478	0,9622	0,9872
0,08	0,8070	0,8708	0,8943	0,9077	0,9398	0,9564	0,9852
0,10	0,7870	0,8563	0,8821	0,8972	0,9328	0,9512	0,9833
0,12	0,7693	0,8439	0,8716	0,8878	0,9264	0,9464	0,9817
0,14	0,7535	0,8323	0,8617	0,8790	0,9204	0,9420	0,9801
0,16	0,7389	0,8216	0,8527	0,8709	0,9149	0,9380	0,9787
0,18	0,7255	0,8116	0,8442	0,8632	0,9097	0,9341	0,9773
0,20	0,7129	0,8023	0,8360	0,8558	0,9048	0,9304	0,9760
0,30	0,6605	0,7618	0,8008	0,8243	0,8828	0,9139	0,9701
0,40	0,6187	0,7284	0,7717	0,7981	0,8639	0,8996	0,9648
0,50	0,5838	0,6995	0,7462	0,7744	0,8470	0,8867	0,9600
0,60	0,5538	0,6739	0,7270	0,7534	0,8313	0,8741	0,9554
0,70	0,5277	0,6508	0,8020	0,7338	0,8168	0,8632	0,9511
0,80	0,5044	0,6297	0,6825	0,7156	0,8030	0,8525	0,9470
0,90	0,4836	0,6103	0,6646	0,6987	0,7899	0,8421	0,9429
1,00	0,4650	0,5923	0,6476	0,6826	0,7774	0,8322	0,9389
1,10	0,4481	0,5756	0,6317	0,6674	0,7654	0,8226	0,9351
1,20	0,4328	0,5599	0,6165	0,6530	0,7538	0,8133	0,9313
1,30	0,4189	0,5452	0,6023	0,6393	0,7426	0,8042	0,9276
1,40	0,4062	0,5315	0,5888	0,6262	0,7318	0,7954	0,9240
1,50	0,3946	0,5186	0,5760	0,6137	0,7214	0,7868	0,9203
1,60	0,3840	0,5065	0,5637	0,6018	0,7112	0,7784	0,9168
1,70	0,3743	0,4950	0,5521	0,5904	0,7014	0,7702	0,9133
1,80	0,3655	0,4842	0,5410	0,5794	0,6918	0,7622	0,9098
1,90	0,3574	0,4740	0,5305	0,5688	0,6825	0,7544	0,9064
2,00	0,3501	0,4644	0,5203	0,5587	0,6734	0,7466	0,9030
2,10	0,3433	0,4552	0,5106	0,5489	0,6646	0,7391	0,8990
2,20	0,3372	0,4466	0,5014	0,5395	0,6560	0,7317	0,8962
2,30	0,3316	0,4385	0,4925	0,5304	0,6476	0,7245	0,8929
2,40	0,3266	0,4308	0,4840	0,5217	0,6394	0,7173	0,8896
2,50	0,3220	0,4234	0,4759	0,5133	0,6314	0,7104	0,8864
2,60	0,3179	0,4166	0,4681	0,5044	0,6236	0,7035	0,883
2,70	0,3142	0,4100	0,4606	0,4974	0,6160	0,6967	0,879
2,80	0,3110	0,4039	0,4535	0,4899	0,6085	0,6901	0,876
2,90	0,3081	0,3981	0,4467	0,4826	0,6012	0,6836	0,873
3,00	0,3055	0,3926	0,4401	0,4756	0,5941	0,6772	0,870

Example: $\Psi_{0,05}(1,60;15) = 0,5637$ - (From H.S. Sichel, March 1966, and B.M. Wainstein, April 1975, Journal of South African Institute of Mining and Metallurgy)

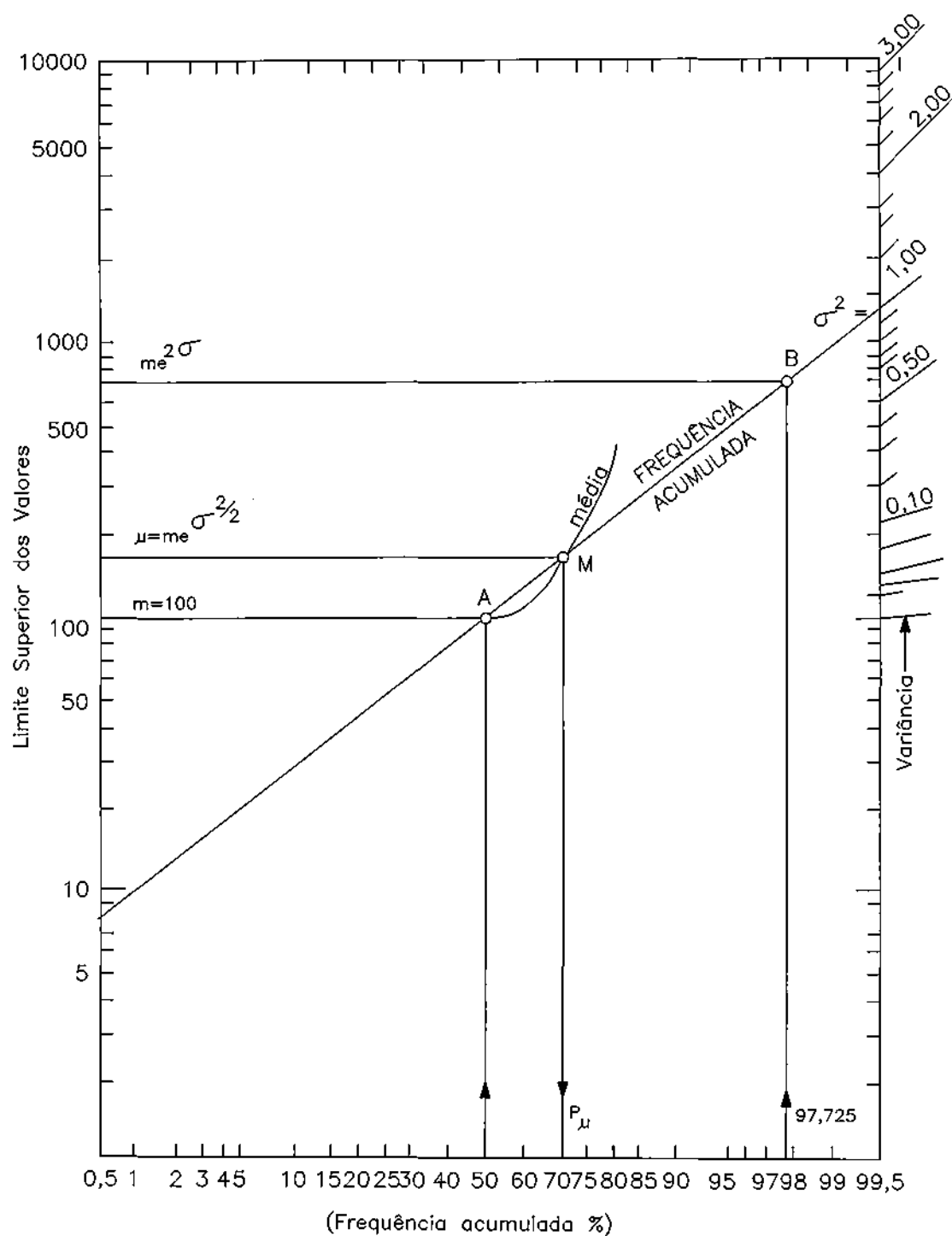


Fig. 3.36 Construção da escala de variância e do lugar geométrico da média (segundo Rendu, 1981).

4. Fatores condicionantes da delineação

Quando se estimam recursos e reservas de um depósito mineral, mostrado em mapa e seções geológicas, isto é, transformado em um corpo geométrico análogo, constituindo por um ou mais sólidos que têm um tamanho e um formato, procuramos, da melhor maneira possível representar o depósito. As seções geológicas permitem expressar como se distribuem as variáveis características do depósito.

Há diferentes métodos para a construção do bloco ou blocos representativos do depósito uma vez delimitado o mesmo e a idéia é utilizar o método mais adequado, para que a representatividade seja suficientemente correta. O melhor método é aquele que combina critérios de geologia, de lavra e de economia. Em função do critério aplicado na substituição do corpo mineral por bloco ou blocos análogos e do modo de calcular valores médios para os parâmetros sob exame, tem-se a seguinte classificação em grupos:

Primeiro Grupo: Fatores Médios e Área. Engloba o método dos blocos geológicos e o método da analogia. As áreas são delimitadas com base na geologia e, em parte, com suportes de lavra e economia. As espessuras, volumes, teores e densidades são determinadas diretamente ou calculados ou, então, tomadas de algumas parcelas do depósito ou de um depósito similar.

Segundo Grupo: Blocos de Mineração. Delineam-se áreas de blocos usando serviços subterrâneos, e considerações geológicas e econômicas. Os parâmetros de cada bloco são calculados de várias maneiras. Objetiva a lavra do depósito.

Terceiro Grupo: Seções. Inclui os métodos da seção padrão, da seção linear e das isolinhas. Delineia-se o corpo mineral e os blocos são construídos a partir de princípios de interpretação dos dados obtidos com a exploração. Os parâmetros dos blocos são determinados de vários modos.

Quarto Grupo: Avaliação Analítica. O corpo mineral é delimitado e subdividido em blocos de formato simples (prismas triangulares ou poligonais). Os parâmetros para cada bloco são determinados diretamente ou computados como médias aritméticas.

O primeiro e o quarto grupo são amplamente usados no cálculo de recursos de carvão; depósitos não metálicos e metálicos são estimados pelo primeiro e terceiro grupos, preferencialmente.

A partir de 1980 os métodos geoestatísticos têm sido intensivamente usados por empresas de maior porte na avaliação de jazidas de ferro, nióbio, fosfato, bauxita, diamante aluvionar, ouro, caulim, etc.

Ao se processar a delimitação dos depósitos minerais, fatores diversos são levados em conta, dentre os quais podemos citar: a) **conteúdo industrial mínimo** ou **teor crítico** ou **teor de corte** (*cut-off grade*), b) **componentes minerais principais, secundários e deletérios**, c) **tipo industrial de matéria prima**, d) **limite inferior** ou **mínimo de teor**, e) **espessura máxima de estéril contido**, f) **espessura mínima de minério**, g) **relação estéril-minério**, etc. Alguns dos temas mencionados serão examinados a seguir. O leitor verificará que os dados apresentados permitem, durante a exploração mineral,

que se determinem quais as intersecções mineralizadas potencialmente econômicas; isto significa que qualquer obra de pesquisa (galeria, furo de sonda, etc.) que atravessa uma dada massa mineral pode ser avaliada individualmente. Por outro lado a avaliação pode ser feita globalmente, se conveniente. A idéia básica é saber se a intersecção mineralizada satisfaz os critérios estabelecidos para extração econômica.

Os teores estabelecidos para uma dada intersecção, a partir de amostras individuais devem ser transformados em um teor médio ponderado e comparados com o teor considerado econômico, para uma espessura igual ou maior que a espessura mínima de lavra.

Quando se fala em espessura, estamos considerando a espessura verdadeira, calculada a partir da espessura interceptada, bastando para isso obter o produto dessa última pelo seno do ângulo de corte entre a obra de pesquisa e a estrutura do corpo. Por exemplo, se um furo vertical de sonda atravessou uma zona mineralizada com 20 m de extensão e o mergulho dessa zona é 52°, tem-se que a espessura real é igual a 15,76 m.

Um depósito mineral é delineado com um objetivo principal, que é transformá-lo em uma jazida e, em seguida, em uma mina. Os fatores condicionantes da delineação são estabelecidos em função da lavra da substância de interesse, pois caso contrário seria apenas gasto inútil.

Em consequência do que acima se escreve, algumas observações sobre a questão do planejamento de lavra são discutidas a seguir, conforme texto de Valente, 1982.

Planejamento: via maximizante ou via estacionária?

A primeira observação a ser feita sobre questões de planejamento de lavra, deve ser o chamar a atenção dos interessados para um dilema fundamental do "planejamento geoestatístico de lavra": qual é melhor, o planejamento pela via estacionária ou pela via maximizante? Nem sempre estas duas vias conduzirão ao mesmo resultado real. Adicionalmente, saliente-se que as primeiras tentativas do planejamento de um desmonte procuraram maximizar a função objetivo, dita "função benefício", e, no caso a céu aberto, preocuparam-se com a determinação do contorno final (*ultimate pit*) de um desmonte a céu aberto onde a referida maximização do benefício fosse alcançada.

Sem dúvida que são problemas importantes, mas uma vez definido qual o contorno final do desmonte, resta ainda saber como é que ele se alcançará ao longo do tempo, pois nem sempre é possível ir pelo caminho máximo da "função benefício" (ir por esse caminho é extremamente raro, diríamos mesmo que quase impossível na prática), apesar das tentativas de Vallet (1976, *Optimisation Mathématique de l'exploration d'une mine à ciel ouvert ou le problème de l'enveloppe. Annales des Mines de Belgique, Fev*) e das possibilidades da "análise convexa" de Bongarçon e Maréchal (1976, *A New Method for Open Pit Design. Parametrization of the Final Pit Contour. 14th APCOM*).

Por outro lado, a estacionarização rígida de uma lavra deve violar o conceito de maximização de um "benefício", principalmente se esse benefício for de caráter econômico-financeiro, pois este tenderá sempre a lavar primeiro as zonas mais ricas e/ou de menor custo de lavra e nunca nas condições médias da jazida virgem.

O dilema está apresentado. Como o resolver? A resposta está detalhada em Valente (1982, vol. V, p. 1347-1372), pelo que adiante nos limitamos à apresentação das principais conclusões.

Planejamento a longo e médio prazos

Como regra geral, mas não sem exceções, nos últimos tempos tem-se optado por definir os limites finais da lavra pela via maximizante do benefício mas, depois, abandonar essa via e, dentro dos limites finais estabelecidos, programar a lavra pela via estacionária. Isto quer dizer, que a longo prazo manda a via maximizante e a médio prazo a via estacionária; assim, se garante o retorno financeiro de toda a vida da mina e se garante, em determinados períodos, a qualidade do *run-of-mine* a ser tratado em usina ou a ser vendido de imediato. Pode-se deduzir que a via maximizante é do agrado dos economistas e a via estacionária é do agrado dos concentradores, pois estes últimos detestam que se lhe mude frequentemente a qualidade do material que recebem para tratar e do qual devem retirar um concentrado de características bem definidas (e constantes) para ser aceito no mercado. Assim, a via estacionária, normalmente, não considera parâmetros econômicos e preocupa-se é na estacionarização de parâmetros técnicos, tais como teores, granulometrias, etc.

Logo, depois de obtida a cava final, com ela tem-se a definição de outros parâmetros pertinentes (tais como o teor de corte usado na triagem do minério e do estéril); deve proceder-se de imediato a uma nova parametrização (procurando novos teores médios e de corte, etc), incidindo apenas sobre o material a desmontar (e não sobre a reserva geológica da jazida toda). Logicamente, para um mesmo teor de corte, esta nova parametrização conduzirá a um teor médio mais alto do que a parametrização inicial (da reserva geológica), caso contrário estamos negando a obtenção de um “benefício” maximizado. Esta nova parametrização deverá definir as características médias (parâmetros) a estacionarizar ao longo da lavra, o minerador e o concentrador deverão, então, programar-se para essas características médias, que deverão permanecer constantes por períodos de duração conveniente.

Planejamento a curto prazo

Assim, é usual a elaboração de planos de lavra a longo prazo, de benefício máximo (que são revistos, com ou sem uso da análise convexa, em função de variações de mercado, de custos operacionais, etc.), cobrindo horizontes definidos (cava de exaustão, plano para os próximos 10 anos de produção, etc.). Respeitando os limites e os condicionalismos geométricos destes planos, elaboram-se, depois, os planos de médio prazo, também cobrindo horizontes definidos (planos para o próximo ano, o próximo semestre, o próximo trimestre, etc.), mas agora, ainda usualmente, são planos de objetivos estacionários (*run-of-mine* constante e de características médias definidas, por exemplo); mas isto não significa que o 2º plano a médio prazo tem de ter as mesmas características médias do 1º plano a médio prazo, pois o que se pretende é estacionarizar as características de cada um daqueles planos. A fronteira entre o “médio prazo” e o “curto prazo” é variável e depende das características operacionais, escalas de produção, etc de cada mina, mas um plano de curto prazo nunca deverá ultrapassar o período de um mês, sob pena de se desatualizar com o decorrer das operações de lavra, as quais, por melhor planejadas que sejam e melhor executadas também, sempre apresentarão diferenças entre o planejamento e o executado e/ou obtido.

É para a elaboração, ajuste etc., dos planos de lavra a curto prazo que se programam e se implantam os controles de pré-lavra e de lavra. Estes controles afastam o planejamento a curto prazo do dilema em pauta, exceto no sentido de que esses controles estão fornecendo informação para se planejar conforme e de acordo com os planos a longo e médio prazos já existentes.

Assim, no dia a dia de operação, há que programar para que, por exemplo, a pilha de homogeneização seja alimentada em condições aceitáveis, assim fornecendo um *run-of-mine* estacionarizado de acordo com o objetivo perseguido. Parece oportuno, aqui, esclarecer o significado de dois termos que, na gíria operacional, por vezes se

confundem: **estacionarizar** é a obtenção de uma média constante, por mistura (daí o termo **blendagem**, oriundo do inglês) de ROM vindo de mais de uma frente de lavra, enquanto **homogeneizar** é baixar a variabilidade (em termos de variâncias e desvios) em torno de uma média constante. A média do que entra num pátio de homogeneização é a mesma média do que sai desse pátio, a qual foi alcançada, antes, pela mistura de ROM acima mencionada.

O dilema inicial está ultrapassado na programação de lavra de curto prazo e, assim, é possível alguma forma de planejamento de lavra manual e, no caso de uso de computador, é possível o uso de programas de tipo conversacional. Nestes programas recorre-se ao banco de dados existentes (que deve conservar todas as características dos blocos de lavra e dos BDL - "blocos de decisão de lavra", a mínima unidade de lavra sobre a qual se pode tomar uma decisão; o traçado da cava de exaustão ótima; todas as combinatórias admissíveis de lavra para o resultado estacionarizado pretendido; disponibilidade e performance de equipamentos de lavra; etc.), o qual é atualizado com base nos relatórios diários de produção e de controle, para depois nos responder o que deve ser feito no período seguinte (dia, semana, etc.) para se atingir o objetivo e respeitando todos os constrangimentos existentes, podendo ainda responder-nos a perguntas do tipo: que tenho de fazer na frente A, para obter a produção desejada com a qualidade desejada e sem trancar a mina, se na frente B colocar a escavadeira X trabalhando para Y caminhões?.

Lavra a céu aberto ou subterrânea?

Embora se tenha no item anterior falando essencialmente em termos de lavra a céu aberto, a conceituação apresentada é também válida para lavra subterrânea, onde também há objetivos finais de benefício máximo e intermédios de estacionarização; quanto aos objetivos de curto prazo é evidente a generalização do então afirmado.

Assim, não é uma diferença de objetivos que irá diferenciar uma jazida, para sofrer lavra a céu aberto ou lavra subterrânea.

A opção de se lavar subterraneamente ou a céu aberto depende de se ultrapassar ou não a relação de mineração limite (ou a relação estéril/minério limite), número adimensional que expressa uma relação mássica (ou seja, t/t, por exemplo).

Esta **relação de mineração limite** é um dos valores fundamentais de qualquer planejamento de lavra, bem como os denominados **teores de corte** (para a mesma jazida haverá teores de corte diferentes se ela for lavrada subterraneamente ou se a céu aberto, admitindo como tecnicamente viáveis ambos estes tipos de lavra), os **teores mínimos** ou **marginais**, etc, que adiante se definirão, todos possuindo importantes significados técnicos e econômicos, sendo impossível o seu cálculo sem recurso a qualquer tipo de "função benefício" e sem se recorrer às técnicas de parametrização, conforme já se referiu anteriormente. O exame e a aplicação dos fatores mencionados são avaliados a seguir, com base em estudo realizado por Valente (1982, Vol. V, p. 1347-1372). Os cálculos e representações gráficos não tiveram modificada a base monetária, para atualmente.

Relação de mineração limite (relação estéril / minério)

A escolha ou a delimitação entre as alternativas de se lavar a céu aberto ou em subsolo é feita levando-se em conta os custos de lavra, a recuperação da lavra e a diluição. A mineração a céu aberto, normalmente, é levada a cabo com a remoção de uma certa proporção de estéril (de cobertura ou de profundidade) e o custo desta operação, obviamente, deve ser levado em conta. Desta forma, a relação estéril/minério, também denominada relação de mineração, desempenha um importante papel na definição do método de lavra, se a céu aberto ou se em subsolo.

4. Fatores condicionantes da delimitação

O domínio de cada uma das opções de lavra (céu aberto ou subterrânea) pode ser entendido através da análise das expressões:

EXPRESSÃO	OPÇÃO
$C_{Ms} > C_{Mca} + R.C_e$	1. Lavra a céu aberto (1)
$C_{Ms} = C_{Mca} + R.C_e$	2. Indiferente (2)
$C_{Ms} < C_{Mca} + R.C_e$	3. Lavra subterrânea (3)

onde:

C_{Ms} = custo de lavra subterrânea de uma unidade mássica (1 t) de minério, incluindo os custos operacionais de desmonte, carregamento, britagem do minério e transporte do mesmo até à usina de concentração;

C_{Mca} = custo de lavra a céu aberto de uma unidade mássica do minério, incluindo os custos de desmonte, carregamento, britagem e transporte

até à usina de concentração;

C_e = custo de lavra do estéril, incluindo seu desmonte, carregamento e transporte até ao correspondente bota fora; e

R = relação de mineração ou relação estéril/minério, que representa o número de unidades mássicas de estéril a remover para cada unidade mássica de minério lavrada a céu aberto”.

A condição expressa pela equação (2) reflete a condição limite para a lavra a céu aberto e a relação de mineração R é denominada relação de mineração limite (R_L). Assim sendo, se qualquer bloco a ser desmontado, demanda a remoção de uma massa de estéril associada a uma relação de mineração superior ao valor de R_L , o mesmo só poderá ser lavrado subterraneamente.

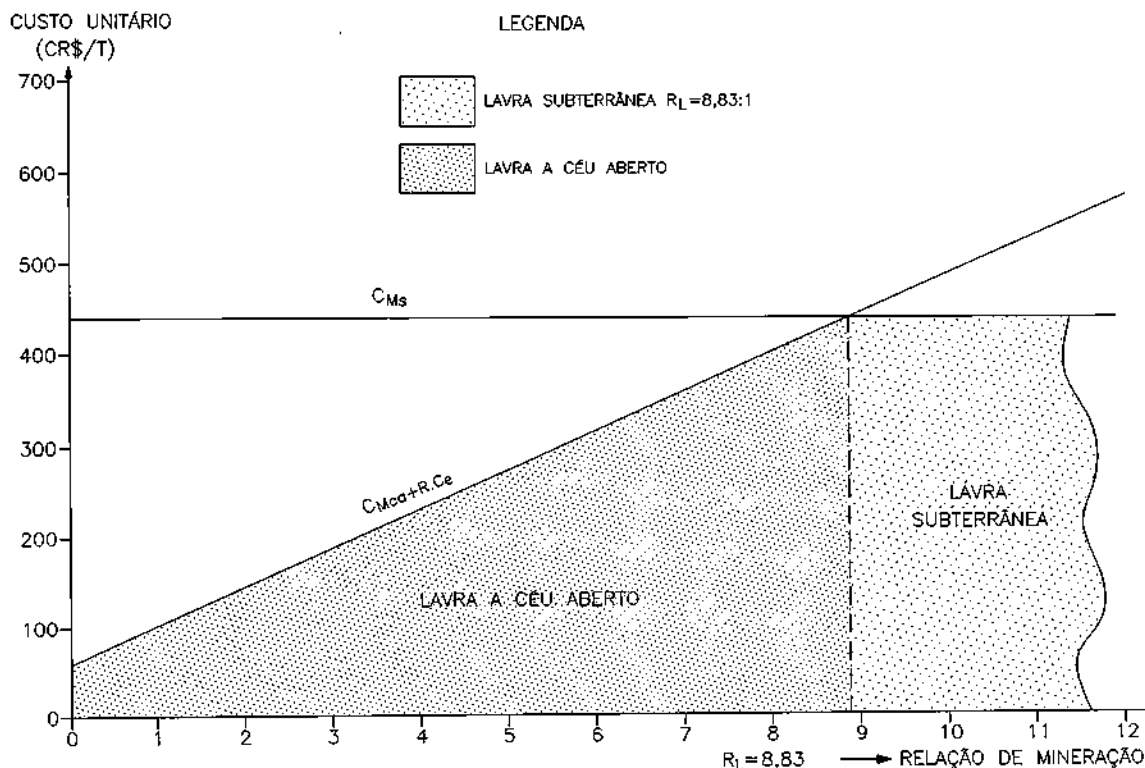


Fig. 4.1 Campos de lavra a céu aberto e subterrâneo (Custo x Relação de Mineração). Segundo Valente, 1982.

Da equação (2) tira-se, facilmente, o valor da relação limite:

$$R_L = \frac{C_{Ms} - C_{Mca}}{C_e}$$

Supondo que para uma determinada jazida se obtém $R_L = 8,83$, a Figura 4.1 evidencia o valor da relação de mineração limite e a divisão dos campos **céu aberto** e **subterrâneo**, para determinados custos de lavra.

Os custos de lavra, tanto os relativos às operações em sub-solo quanto a céu aberto, podem ser referidos à tonelagem de metal contido recuperável; na lavra subterrânea, este custo relativo é função do teor do minério lavrado (alimentação da usina); na lavra a céu aberto, este custo relativo é função do teor do minério e da relação de mineração.

Os custos de lavra (considerando o metal recuperável) podem ser escritos das seguintes maneiras:

Para a lavra subterrânea:

$$C_s = \frac{m \cdot C_{Ms}}{t_{pi}^* \cdot r_i / 100}$$

Para a lavra a céu aberto:

$$C_{Ca} = \frac{C_{Mca} \cdot m + C_e \cdot e}{t_{pi}^* \cdot r_i / 100}$$

em que:

C_{Ms}, C_{Mca}, C_e	têm seus significados já referidos anteriormente;
r_i	recuperação em metal admitida para o teor t_{pi}^*
t_{pi}^*	teor percentual krigado do bloco de minério i
t_{ps}^*, t_{pca}^*	são os teores percentuais (equivalentes a t_{pi}^*) porém referidos a minérios produzidos em subsolo e em céu aberto, respectivamente; e
e, m	massas de estéril e minério.

Supondo ainda a jazida da Figura 4.1, vejamos como se calcularia a sua relação de mineração limite. Para tal admitamos os seguintes custos de lavra por unidade de metal recuperável ($m = 1$):

$$C_s = \frac{100 \times 432,16}{t_{ps}^* (0,9029 + 0,0895 \ln t_{ps}^*)} \quad (4)$$

$$C_{Ca} = \frac{100(55,58 \cdot m + 43,41)}{t_{pca}^* (0,9029 + 0,0895 \ln t_{pca}^*)} \quad (5)$$

Fazendo-se nesta última equação $m = 1$, a relação de mineração (R) equivale numericamente a massa de estéril (e). Assim, a equação (5) pode ser escrita:

$$C_{Ca} = \frac{100(55,58 + 43,41 \cdot R)}{t_{pca}^* (0,9029 + 0,0895 \ln t_{pca}^*)} \quad (6)$$

Para um mesmo teor de minério, produzido a céu aberto ou em subsolo, obtém-se a relação de mineração limite, igualando-se os custos relativos de lavra a céu aberto e de subsolo expressos pelas equações (4) e (6):

$$0 \neq t_{ps}^* = t_{pca}^* \quad e \quad C_s = C_{Ca}$$

implica: $R = R_L$

$$e \quad 100 \times 438,78 = 100 (55,58 + 43,41 \times R_L)$$

ou $R_L = 8,83$ (valor já antes referido).

Com base na equação (4) pode construir-se a curva de custos relativos de lavra subterrânea (custo por tonelada de metal recuperável) em função dos teores produzidos. Conforme já visto, esta curva coincide com a curva de lavra a céu aberto quando a relação de mineração equivale a relação de mineração limite ($R = R_L$).

Esta curva delimita os campos de lavra subterrânea (acima da curva onde $R > R_L$) e de lavra a céu aberto (abaixo da curva considerada, onde $R < R_L$). A curva em epígrafe, dada a sua importância, encontra-se destacada (traço mais forte) na Figura 4.2.

Apoiando-se na equação (6) e fazendo-se variar a relação de mineração R desde 0:1 e 1:1 até 12:1 obteve-se um conjunto de curvas que se pode denominar "isotermas"

(por analogia com a equação dos gases $PV = nRT$). Estas curvas comparadas com a “isoterma” subterrânea (com $R = RL = 8,83$) permite visualizar rapidamente a fronteira entre os dois tipos de lavra, bem como encontrar os correspondentes custos operacionais aproximados, para os diferentes teores lavrados e para as diferentes relações de mineração.

Através da relação limite, pode-se delinear o contorno industrial do jazimento.

A questão mais problemática no estabelecimento do RLD (Relação Limite de Decapeamento) é o preço de venda do minério ou do concentrado ou do metal, que deve ser estimado para um período equivalente ao da vida da mina. É claro que quanto mais elevado é o preço de venda, maior será a relação limite (RL) e maior será a cava.

No estabelecimento da RL operamos com minérios de teor diferente e preços variáveis, conforme é exemplificado no caso simples da Tabela 4.1. Na folha de cálculo há um preço equivalente ao praticado no mercado e dois outros, 10% e 20% mais elevados. O exame da tabela mostra:

a) Ao preço de US\$ 2,0 o quilo do metal apenas minérios com teor superior a 1% dariam lucro, pequeno para esse teor; para minério com 1,1%, o lucro seria 47% maior e para minério com 1,2%, 60% maior. Isso é facilmente verificável quando se examina a relação estéril-minério.

b) Ao preço de US\$ 2,2 o quilo, minérios com teor superior a 0,9% seriam lucrativos. A taxa de crescimento do lucro é menos elevada que no caso acima, para teores crescentes; e

c) Para um valor de US\$ 2,4 o quilo, minérios com teor superior a 0,8% seriam lucrativos. A taxa de crescimento do lucro é maior que no caso (b) e menor que no caso (a).

Teor de corte (céu aberto)

O teor é a expressão quantitativa do total de um dado elemento químico no minério, que é formado por minerais-minério e ganga. Pode ser formulado de vários modos, como unidades de peso, por exemplo, ou percentagem em peso de metal no minério, ou ainda como unidades de volume, por exemplo, barris de óleo por metro cúbico de folhelho oleífero; usam-se, também, unidades mistas, por exemplo, volume de carvão por metro quadrado, ou metro-percentagem do metal por metro quadrado. Muito comum, para minérios de baixo teor é expressá-lo em gramas por tonelada ou por metro cúbico de minério. No caso de gemas, a expressão é quilate por metro cúbico.

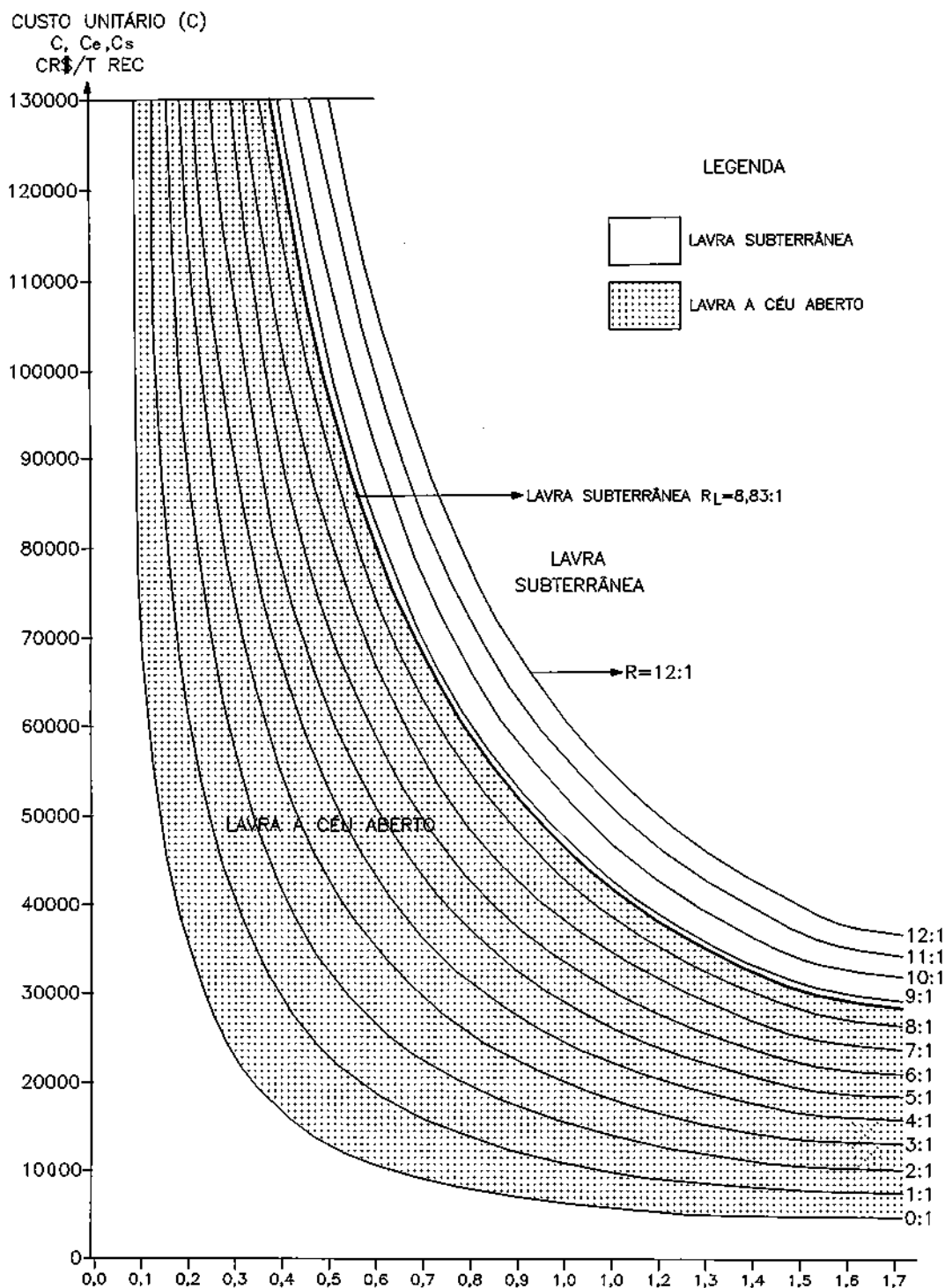


Fig. 4.2 Campos de lavra a céu aberto e subterrâneo (Custo x Teor), segundo Valente, 1982.

Tabela 4.1. Cálculo da Relação Limite de Decapeamento, para preços diferentes do minério

Amostra inicial (%)		1,20		1,10		1,00		0,90		0,80		0,70	
Recuperação por tonelada (kg)		0,60		8,80		8,00		7,20		6,40		5,50	
		T	kg Cu	T	kg Cu	T	kg Cu	T	kg Cu	T	kg Cu	T	kg Cu
		minério		minério		minério		minério		minério		minério	
Custos de lavra por t (US\$)		2	0,208	2	0,208	2	0,208	2	0,208	2	0,208	2	0,208
Custos de britagem, moagem		4	0,416	4	0,416	4	0,416	4	0,416	4	0,416	4	0,416
Custos de concentração		8	0,833	8,5	0,965	9	1,125	9,5	1,319	10	1,562	10,5	1,909
Custo total (US\$)		14,0	1,457	14,5	1,589	15,0	1,749	15,5	1,943	16	2,186	16,5	2,533
Relação limite de decapeamento													
A) US\$ 2,0 kg	Valor de venda	17,00		16,40		15,90		15,30		14,80		14,30	
	Lucro	3,00		1,90		0,90		- 0,20		- 1,20		- 2,20	
	Relação *	1,66/1		1,05/1		½		-		-		-	
B) US\$ 2,2 kg	Valor de venda	17,50		16,90		16,33		15,78		15,25		14,73	
	Lucro	3,50		2,40		1,33		0,28		- 0,75		- 1,77	
	Relação *	1,94/1		1,33/1		0,74/1		0,15/1		-		-	
C) US\$ 2,4 kg	Valor de venda	18,00		17,39		16,80		16,23		15,68		15,15	
	Lucro	4,00		2,89		1,80		0,73		- 0,32		- 1,35	
	Relação*	2,21/1		1,60/1		1/1		0,40/1		-		-	

* Foi usado o valor de US\$ 1,8 para o stripping do estéril por tonelada.

Os teores usualmente considerados na delineação dos depósitos minerais incluem: a) teor amostrado; b) teor lavrado; c) teor de concentração; d) teor recuperado, etc. Do teor amostrado ao teor recuperado há decréscimo do valor.

O **teor de corte** é o menor teor de componente valioso que lavrado o minério que o contém, ainda é rentável. O parâmetro pode ser expressado de outro modo: é o menor teor que pode ser incluído em uma interseção potencialmente econômica. A primeira definição é usada na delineação do corpo mineral, enquanto a segundo, na fase de exploração.

O teor de corte é função direta dos custos da pesquisa, dos custos de lavra, da relação estéril-minério, do custo de transporte da mina à instalação de concentração, do custo beneficiamento e do custo de transporte da instalação de beneficiamento até ao local de consumo. É função indireta da recuperação na lavra e no beneficiamento, da recuperação metalúrgica, do valor do componente útil e da diluição. Quando se fala em relação estéril-minério isso significa tornar acessível o minério para lavra a céu aberto (fazendo-se o decapeamento) ou abrir acessos subterrâneos no estéril, visando atingir o minério.

Os diversos componentes que entram no estabelecimento de teor de corte variam entre limites amplos e são interdependentes. Os custos, por sua vez, dependem da tipologia do jazimento, da sua arquitetura e trama, da paragénesse, dos encargos financeiros, da amortização do capital, do ambiente geográfico-econômico, etc.

Em várias situações ocorrem transições entre minérios de teores diferentes e fica difícil marcar um limite físico para o corpo de minério. Torna-se, pois, necessário estabelecer o teor de corte – menor conteúdo metálico ou menor conteúdo mineral não metálico – que permite lavra econômica e tal valor é usado para delimitar o corpo mineral.

Continuando a supor a mesma jazida, mencionada na seção anterior, discretizada em termos de blocos de decisão de lavra, para possível lavra a céu aberto, pode-

se definir a função benefício, a nível daqueles blocos, da seguinte maneira:

Para o minério:

$$B_i = V_i = C_i = L_i [Pt_i^* \cdot r_i - (C_{LM} + C_{TMI} + C_{BRI} + C_B + K + K_f)] \quad (7)$$

Para o estéril:

$$B_i = -L_i (C_{LE} + C_{TEI}) \quad (8)$$

Embora já se tenha referido o significado da maioria dos símbolos agora representados, por razões de maior consistência e clareza, detalha-se novamente o significado dos mesmos, acrescentando-se os valores numéricos correspondentes à jazida em pauta e que está sendo considerada para exemplificação:

4. Fatores condicionantes da delimitação

B_i	Função benefício relativa ao bloco de minério ou estéril considerado (variável dependente); B_{im} e B_{ie} referem-se a função benefício para blocos de minério e estéril, respectivamente;
V_i	Receita referente ao bloco de minério i ;
C_i	Despesa referente ao bloco de minério i ;
L_i	Tonelagem tal qual do bloco de minério ou de estéril $i = 3312,5$ t;
P	Preço de venda da unidade de metal contida = Cr\$ 114.019/t
t_i^*	Teor krigado do bloco de minério i , adimensional;
r_i	Recuperação em metal admitida para o teor t_i^* ; supondo-se que: $r_i = 1,3151 + 0,0895 \cdot \ln t_i^*$
C_{LM}	Custo (por tonelada tal qual) de lavra de minério;
C_{TM_i}	Custo (por tonelada tal qual) de transporte do bloco de minério i ;
C_L	$C_{Ma} = C_{LM} + C_{TM_i}$ = custo de lavra (a céu aberto) do minério, incluindo transporte (e excluindo a britagem) = Cr\$ 43,41/t;
C_{BR_i}	Custo de britagem = Cr\$ 12,17/t;
$C_{LM} + C_{TM_i} + C_{BR_i}$	$C_L + C_{BR}$ = custo do minério a céu aberto após britagem = Cr\$ (43,41 + 12,17)/t = Cr\$ 55,58/t
C_B	Custos de beneficiamento (por tonelada de alimentação) excluindo a britagem = Cr\$ 120,21/t;
K	Custos indiretos = Cr\$ 74,24/t;
K_f	Custos financeiros = Cr\$ 50,10/t;
$C_{LE} + C_{TE}$	$C_{LM} + C_{TM_i} = C_L$ = custo de lavra do estéril = Cr\$ 43,41/t;

Com os elementos supra, pode-se escrever a função benefício apenas em função do teor do bloco como segue:

Para o minério (da equação (7) vem:

$$B_i = 3312,5 [114 \cdot 019 t_i^* (1,3151 + 0,0895 \ln t_i^*) + (55,58 + 120,21 + 74,24 + 50,10)]$$

$$\therefore 3312,5 [114 \cdot 019 t_i^* (1,3151 + 0,0895 \ln t_i^*) - 300,13]$$

$$\text{ou: } B_i = 496 \, 697 \, 406,6 t_i^* + 33 \, 803 \, 070,41 t_i^* \ln t_i^* - 994 \, 180,63 \quad (9)$$

Para o estéril, com apoio na equação (8) a função benefício é constante e negativa:

$$B_i = 3312,5 \times 43,41 = - \text{Cr\$ } 143 \, 795,63$$

Definição: "Entende-se agora por **teor de corte** de um bloco, aquele teor capaz de pagar sua lavra, seu tratamento, bem como os seus custos indiretos e financeiros, não auferindo nenhum lucro e também não suportando a remoção de nenhum estéril associado" (Valente, 1982).

Para o caso em exemplificação, o teor de corte é aquele teor que anula a função benefício expressa pela função (9). Assim:

$$\text{Para } B_i = 0, R = 0 \text{ e } t_i^* = t_c^* \rightarrow 496 \, 697 \, 406,6 t_c^* + 33 \, 803 \, 070,41 t_c^* \ln t_c^* - 994 \, 180,63 = 0$$

em que t_c^* representa o teor de corte.

A equação anterior não é solúvel por métodos algébricos rotineiros, pois trata-se de uma equação transcendente, impossível de se isolar a incógnita em função dos parâmetros

numéricos. No entanto, esta equação é solúvel pelo método de Newton-Raphson e, assim sendo, elaborou-se um programa pertinente para a calculadora de bolso HP-25 que forneceu a raiz (aproximada) $t_c^* = 0,003277636 \cong 0,0033$ que corresponde em termos percentuais a $t^*_{pc} \cong 0,33\%$ (erro inferior a 10^{-12}).

Uma listagem geral dos parâmetros que influenciam o teor de corte é mostrada a seguir.

1) Parâmetros Geológicos

a) Paragênese, que determina a relação entre minério concentrável e minério refratário e ao mesmo tempo, define o processo de concentração; b) Granulometria e grau de liberação, que influenciam no custo da moagem; c) Teores de elementos úteis e deletérios; diluição; d) Grau de heterogeneidade da distribuição dos minerais e dos teores, no corpo mineral; e) Arquitetura, estrutura, textura e dimensões do corpo; f) Topografia e hidrogeologia; e g) Estabilidade de solos e rochas.

2) Parâmetros Econômicos

a) Mercado e preços de venda; b) Disponibilidade e custo de mão-de-obra; c) Preços de lavra, de concentração e de fundição; d) Recuperação na lavra, na concentração e na fundição; e) Política fiscal, estabilidade econômica e política; f) Custo de barragem de rejeito, tratamento da água, construção de bota-foras, recuperação ambiental; e g) Custo do capital.

3) Métodos de lavra

A tendência mundial para se lavar, a céu aberto, depósitos com grandes reservas (e, portanto, de baixo teor em geral) faz com que se possa operar com baixos valores do teor de corte, quanto comparado com a lavra subterrânea. Um exemplo muito simples esclarece a questão: no Morro do Ouro, Paracatu, MG, lavrava-se minério com teor médio ao redor de 0,85 g/t com, teor de corte próximo de 0,4 g/t; lavra a céu aberto, reserva grande, ouro livre, material extraído sem uso de explosivos,

etc. Enquanto isso, na região do Quadrilátero Ferrífero foi lavrado minério aurífero oxidado, com teor médio próximo de 3,5 g/t e teor de corte variável, mas não inferior a 1,9 g/t; a operação era feita a céu aberto e a concentração do ouro se fazia por lixiviação em pilha.

Nos dois exemplos citados não há possibilidade de lavra subterrânea, por antieconômica. Em geral, no Quadrilátero Ferrífero, opera-se com minério com 6-7 g/t ou mais, para um teor de corte ao redor de 3 g/t, no caso de lavra subterrânea.

Em muitos locais do mundo lava-se, a céu aberto, minério de cobre com 0,2-0,3% de teor de corte, enquanto a lavra subterrânea é feita com material com mais de 2% Cu.

Os jazimentos de ouro ligados a aluviões ou a lateritas podem ser operados com teores tão baixos como 0,6 g/m³ para o teor de corte, enquanto que jazimentos filoneanos lavrados subterraneamente, exigem teor de corte com valor muito mais elevado.

O desenvolvimento tecnológico pode modificar substancialmente o teor de corte, citando-se como exemplo os minérios de ferro de baixo teor no Quadrilátero Ferrífero. Se o material é brando e tem baixo teor de fósforo e alumina, pode-se concentrá-lo economicamente se tiver mais de 40% Fe de teor médio. Há restrições tipológicas, que não precisam ser comentadas. O teor de corte do minério de baixo teor é algo próximo de 35% - 38% Fe. A lavra é a céu aberto e envolve produção de milhões de toneladas, que são concentradas para cerca de 65% Fe.

Uma vez definido o teor de corte e a relação estéril-minério, pode-se delinear o jazimento e modelar a geometria de cava (lavra a céu aberto) ou da escavação subterrânea.

Teor de Corte de Minérios Complexos

Até ao momento tratamos de minério com um minério-mineral ou um metal. Situação diferente ocorre na avaliação de intersecções afetando minérios complexos ou polimetálicos. O teor de corte é estabelecido considerando-

se o componente principal e os componentes restantes (recuperáveis). Desse modo reservas não industriais, por causa do teor de corte para o componente principal, tornam-se econômicas. Um exemplo com minério polimetálico de Cu-Pb-Zn é apresentado a seguir. A tonelada de cada metal, a preços correntes em 1994, era cotada a:

Cu	US\$ 2.251,60
Pb	597,75
Zn	964,00

Como exercício o leitor pode atualizar os valores da tonelada de cada metal.

Admitindo que na concentração se recupere 95% do cobre contido no minério, 30% do chumbo e 55% do zinco, podemos escrever:

		Fatores
Cu	2.251,60 x 95 = 213.902,0	1,000
Pb	597,75 x 30 = 17.932,5	0,084
Zn	964,00 x 55 = 53.030,0	0,248

Adotando-se como teor de corte para o cobre o valor 0,96% Cu, um dado setor do corpo mineral ou uma dada intersecção, com teores de:

Cu	0,90%
Pb	0,56%
Zn	0,48%

poderia ser lavrado, uma vez que o teor de corte "composto" é igual a:

$$0,9 \times 1,0 + 0,56 \times 0,084 + 0,48 + 0,248 = 1,089 \approx 1,1\%$$

Não existem teores de corte específicos para cada espécie de minério ou mineral industrial, já que os condicionantes são variáveis, mantidos idênticos os parâmetros geológicos. Assim, o valor do teor de corte pode ser rígido ou pode ser flexibilizado, quando se incorporam intervalos de teor mais baixo ou quando se trabalha com minério polimetálico.

Um modo alternativo de calcular o teor de corte composto (combinado) é determinar o valor do lucro obtido por cada 1% ou 1 g/t de metal.

Teor mínimo ou marginal (céu aberto)

Teor mínimo ou marginal é aquele teor que paga apenas os custos de beneficiamento além dos custos indiretos e financeiros, subsequentes. Corresponde a um bloco já lavrado que, em lugar de ser jogado ao bota-fora de estéril, é levado à usina e é processado, extraíndo-se o metal, não dando nem lucro nem prejuízo, conforme texto de Valente, 1982.

O cálculo do teor marginal procede-se da seguinte maneira:

$$t_i^* \cdot r_i \cdot P \geq C_{BRI} + C_B + K + K_f$$

ou, para a jazida em exemplificação:

$$t_i^* (1,3151 + 0,0895 \ln t_i^*) \times 114\,019 \geq 12,17 + 120,21 + 74,24 + 50,10 \therefore$$

$$t_i^* (1,3151 + 0,0895 \ln t_i^*) \times 114\,019 \geq 256,72 \therefore$$

$$149\,946,39 t_i^* + 10\,204,70 \ln t_i^* - 256,72 \geq 0$$

$$\text{Quando } t_i^* = t_m^* : 149\,946,39 t_m^* + 10\,204,70 \ln t_m^* - 256,72 = 0 \quad (10)$$

Resolvendo a equação (10) pelo método de Newton-Raphson chega-se, com uma precisão maior que 10^{-12} , ao valor $t_m^* = 0,002848148 \therefore t_{pm}^* \approx 0,28\%$.

Mas já foi visto que:

a) A função benefício para o bloco de minério conforma-se segundo a equação (9) e é positiva para teores acima do teor de corte e negativa abaixo do mesmo. Repetindo ainda o que já foi dito, quanto o teor do bloco é igual ao teor de corte a função benefício se anula; e

b) A função benefício para o estéril é sempre negativa e constante equivalendo-se a Cr\$ - 143.795,63.

Com base nas funções em pauta, pode-se construir facilmente a função benefício em relação ao teor do bloco em questão. Desta maneira confecciona-se o gráfico correspondente à Figura 4.3, ainda para a jazida em exemplificação.

A análise cuidadosa da função benefício, definida para

os diversos intervalos de teores, aponta que:

1º) Quando o teor do bloco é maior ou igual ao teor de corte ($t_i^* \geq t_c^*$), em nível de bloco, a unidade de lavra considerada é minério. O bloco é considerado pago, pois, todos os seus custos (desmonte, transporte, britagem, beneficiamento, custos indiretos e financeiros), proporcionando lucro, se $t_i^* > t_c^*$ e não proporcionando lucro nem prejuízo, se $t_i^* = t_c^*$.

O benefício advindo da lavra do bloco considerado é fornecido pela expressão (9).

Se considerarmos o bloco mencionado (com $t_i^* \geq t_c^*$) no seio do jazimento, tal unidade tecnológica será minério se estiver contida no interior do volume da cava ótima projetada. Obviamente, podem ocorrer blocos tecnológicos com $t_i^* \geq t_c^*$, não desmontáveis, devido ao posicionamento profundo dos mesmos, de tal forma a não suportar economicamente o desmonte das massas estéreis sobrejacentes, capazes de liberar o bloco considerado.

2º) Blocos com $t_m^* \leq t_i^* < t_c^*$, desde que caíam dentro do volume a desmontar, serão lavrados e conduzidos ao beneficiamento, ao invés do bota fora do estéril, promovendo um melhor aproveitamento do recurso mineral.

Particularmente blocos com teores $t_i^* = t_m^*$, desde que desmontados devem ser conduzidos a usina de concentração. Tal assertiva é fácil de se demonstrar, como segue; cabe no presente caso, duas alternativas, quais sejam:

a) Conduz-se o bloco de teor mínimo ao bota fora de estéril. Nestas condições o benefício associado a esta operação seria: $B_{ie} = - \text{Cr\$ } 143.795,63 / \text{bloco}$

b) Desde que o bloco tecnológico com teor mínimo, já tenha sido desmontado e, portanto, já gravado com os custos equivalente a $B_{ie} = - \text{Cr\$ } 143.795,63/\text{bloco}$, os custos extras que incidiriam caso se desviasse o material para a usina de concentração seriam nulos, senão veja-se:

- Custo de britagem:
 $3312,5 \text{ t} \times \text{Cr\$ } - 12,17/\text{t} = - \text{Cr\$ } 40.313,13$
- Custo de beneficiamento:
 $3312,5 \text{ t} \times \text{Cr\$ } - 120,21/\text{t} = - \text{Cr\$ } 398.195,63$
- Custos indiretos:

$$3312,5 \text{ t} \times \text{Cr\$ } - 74,24/\text{t} = - \text{Cr\$ } 245.920,00$$

- Custos financeiros:
 $3312,5 \text{ t} \times \text{Cr\$ } - 50,10/\text{t} = - \text{Cr\$ } 165.956,25$
- Custo totais
 $- \text{Cr\$ } 850.385,01$

O valor auferido com a venda do metal recuperável do bloco seria:

$$L_i \cdot t_m^* \cdot r_i \cdot P = L_i \cdot t_m^* \cdot (1,3151 + 0,0895 \ln t_m^*) \cdot P$$

ou $3312,5 \times 0,00285 (1,3151 + 0,0895 \ln 0,00285) \times 114.019 = \text{Cr\$ } 850.385,01.$

Portanto, o lucro auferido (+ Cr\$ 850.385,01) com a venda do metal contido no bloco após concentrado, paga os custos (- Cr\$ 850.385,01) considerados e, então, é interessante enviar o bloco a usina, pois deste modo se está aumentando a vida da mina e conservando o recurso mineral, não renovável.

O valor da função benefício de um bloco gravado de teor mínimo, quer seja conduzido ao bota-fora de estéril, quer seja levado ao concentrador, vale $B_{ie} = - \text{Cr\$ } 143.795,63$ (vide Figura 4.3).

3º) Os blocos tecnológicos com teor inferior ao teor mínimo ($t_i^* < t_m^*$) são sempre estéreis.

No exemplo apresentado os valores estão registrados em cruzeiros para o ano 1982. O leitor poderá, como exercício, atualizar os valores (para reais).

Em certas situações, a utilização de matéria prima não econômica pode ser feita de modo objetivo. Seja dada uma certa reserva definida em um projeto de lavra, com teor de corte de 2% do metal de interesse. Nenhum bloco de lavra contempla minério com teor mais baixo. A extração de uma tonelada de minério custará US\$ 30,00, e nas seguintes situações, material com teor inferior a 2% poderá ser usado:

a) Um certo bloco tem material com 1,5% e será extraído e levado para o bota-fora. Sua extração é necessária, para liberar minério. Como já está exposto na frente de lavra, e sua retirada custará 20 dólares por tonelada, e deve ser levado para beneficiamento.

b) Em uma mina subterrânea, um painel entre duas galerias de transporte, paralelas entre si, está pronto para

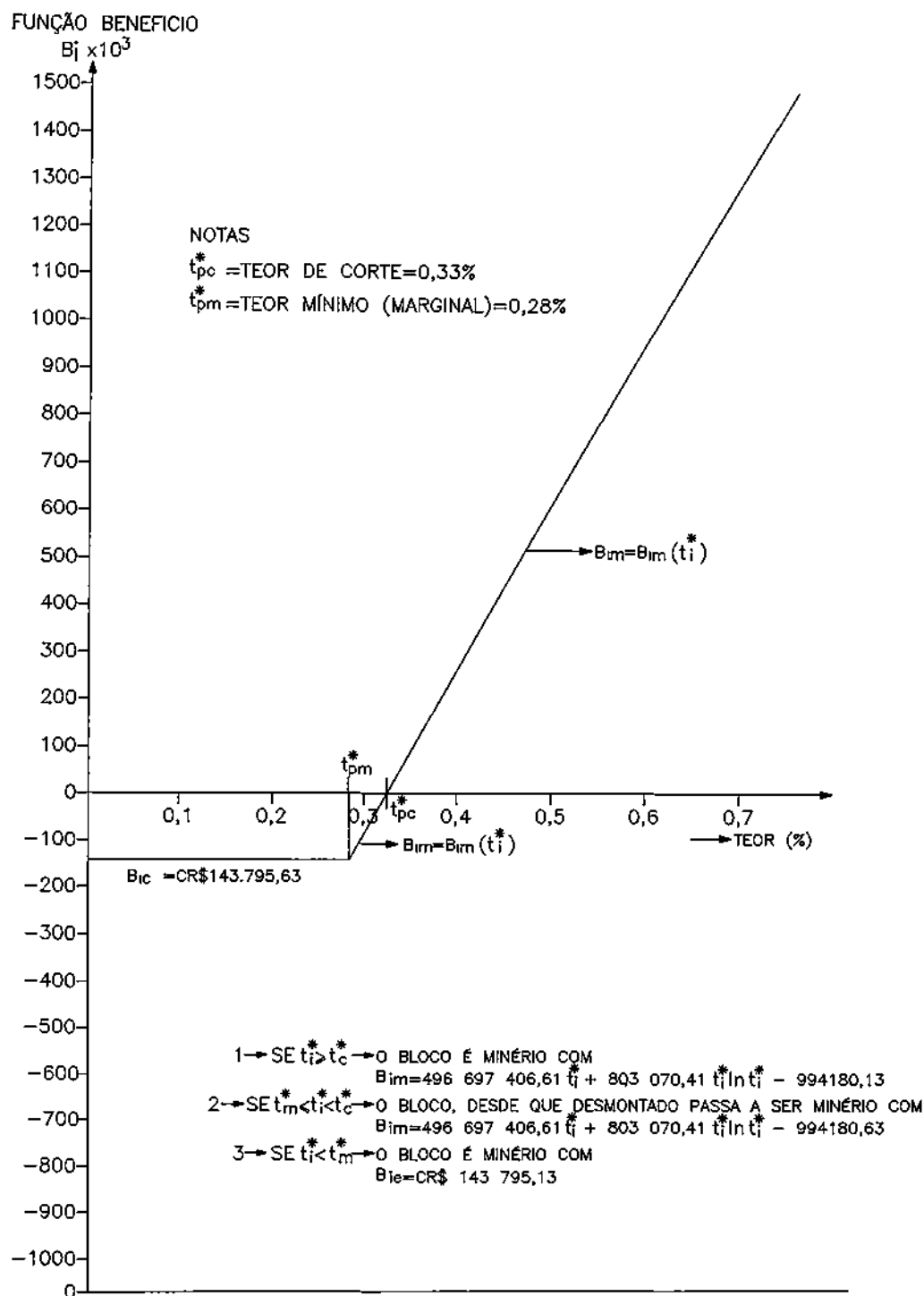


Fig. 4.3 Função benefício versus teores, segundo Valente, 1982

lavra, com teor de 1,2%. No projeto de lavra esse painel foi considerado estéril. Como já está pronto para lavra seu custo de extração será inferior ao estabelecido e o material do painel pode ser aproveitado.

c) Material com teor inferior a 2% intercala-se com minério. O conjunto já foi decapeado e o estéril tem que ser removido. Como já foi feito o decapeamento, pode ser interessante aproveitar o material considerado como estéril.

O principal critério para estabelecer o teor mínimo é a relação entre as porções mineralizadas e as porções com teor inferior ao teor de corte. Essa relação é de cunho geológico. Como o teor mínimo pode se igualar ao teor de corte, não é uma questão puramente econômica.

O critério prático para determinação do teor mínimo é igualá-lo ao teor de corte. Dois resultados poderão resultar de tal procedimento.

1º) Os limites estabelecidos originam um corpo contínuo, de forma relativamente simples, de grandes dimensões e com blocos de teor mais ou menos homogêneo (Figura 4.4). Observa-se que não existem porções de teor superior ao do teor de corte, fora dos limites adotados. A lavra de material fora desses limites produzirá material com teor médio abaixo do teor determinado no projeto de lavra; e

2º) Os limites estabelecidos produzem massas isoladas umas das outras, de forma complicada, com pequenas dimensões e com teores médios significativamente diferentes (Figura 4.5). Nesse caso é necessário adotar outro limite, com teor inferior ao teor de corte; a operação é repetida, até que se tenha um corpo mais contínuo, de teor mais baixo, compensado pelo aumento de reservas, desde que economicamente viável. A lavra deixa de ser seletiva, reduzindo-se o preço de custo da tonelada extraída. Para contrabalançar, o custo na concentração é maior.

Examinemos uma situação peculiar em certas jazidas, onde se tem estéril de profundidade ou "contido". Chama-se estéril contido àquelas massas de estéril embutidas no corpo mineral, e cuja dimensão é tal que não é possível

eliminá-las no processo de cálculo de reservas. Ademais, a lavra não permite separação das mesmas, de modo que ao se calcular o teor médio dos diversos blocos do corpo, as porções estéreis são consideradas. Se a lavra é manual raramente é possível eliminar o estéril contido.

No Quadrilátero Ferrífero, as jazidas de minério de ferro são constituídas por corpos estratiformes, de mergulho médio a alto e contêm minério de alto teor (hematita) ou baixo teor (itabirito). Em muitas das jazidas de hematita intercalam-se camadas de itabirito pobre e/ou filito hematítico e filito. Quando tais camadas têm espessura superior a 2 metros, sempre é possível fazer lavra seletiva, eliminando-as. Se a espessura é menor, com o porte dos equipamentos usados (escavadeiras e pás mecânicas) o procedimento não é passível de realização e lavra-se estéril com o minério. O processo de tratamento pode eliminar parcialmente ou totalmente o estéril. Se o estéril é itabirítico, o efeito é a redução do teor de ferro e o aumento do teor de SiO_2 ; no caso de filito, reduz-se o Fe, em favor da alumina.

Alguns consumidores utilizam concentrados industriais com teor relativamente elevado de SiO_2 (4-5%) e nesse caso é benéfico se ter camadas de itabirito de permeio com camadas de hematita.

Quando se trata de jazimentos com baixo teor, há que cuidar para evitar juntar itabiritos anfíbolícos e goethíticos com o itabirito normal, quartzo-hematítico, pois aqueles itabiritos têm alto conteúdo de H_2O^+ e P, impedindo seu uso. Quando os corpos desses materiais são delgados não é possível separá-los e a eliminação é conseguida na concentração (em parte).

Nas jazidas auríferas associadas à sequência vulcano-sedimentar ou sedimentar do Grupo Nova Lima, no Quadrilátero Ferrífero, a mineralização tende a se distribuir segundo massas um tanto descontínuas, de teor variável. Porções rochosas sem ouro ou massas filíticas estéreis, mais espessas que as porções mineralizadas podem se intercalar de modo tão intrincado que não são evidentes. O conjunto é o corpo de minério.

Para cada jazimento e para cada porção do mesmo, durante a fase de quantificação de reservas e de seleção do método de lavra, estabelecem-se as espessuras máximas das porções estéreis que devem ser lavradas juntamente com o minério. Essas porções contribuem para o empobrecimento do teor, mas tecnicamente não é possível sua eliminação (Figuras 4.5 e 4.6).

Examinemos um exemplo e o procedimento de cálculo. Seja um jazimento pegmatítico com espodumeno, economicamente interessante, mas englobando massas de estéril contido com espessura equivalente a decímetros ou metros. Seja 6% (em volume) o teor de corte (6% de espodumeno).

Na estimativa de reservas, ajuntaram-se espessuras de

estéril que originam os teores mostrados na Tabela 4.2. O pegmatito sob exame tem 220 m de extensão ao longo da direção, 70 m ao longo do mergulho e 6 m de espessura média. Portanto, seu volume equivale a 84.000 m³. Na tabela mostram-se sucessivas massas estéreis agregadas (uma massa com 0,5 m de espessura ou várias totalizando 0,5 m). Se o teor de corte é 6%, a espessura máxima de estéril contido será equivalente a 2 m. Espessuras maiores originam teor menor que o TDC (teor de corte).

Em certas situações, as porções mineralizadas limitadas pelo teor de corte e as porções limitadas pelo teor mínimo de lavra são tão intricadamente associadas a massas estéreis que ao estabelecer o contorno industrial, não se tem economicidade na lavra.

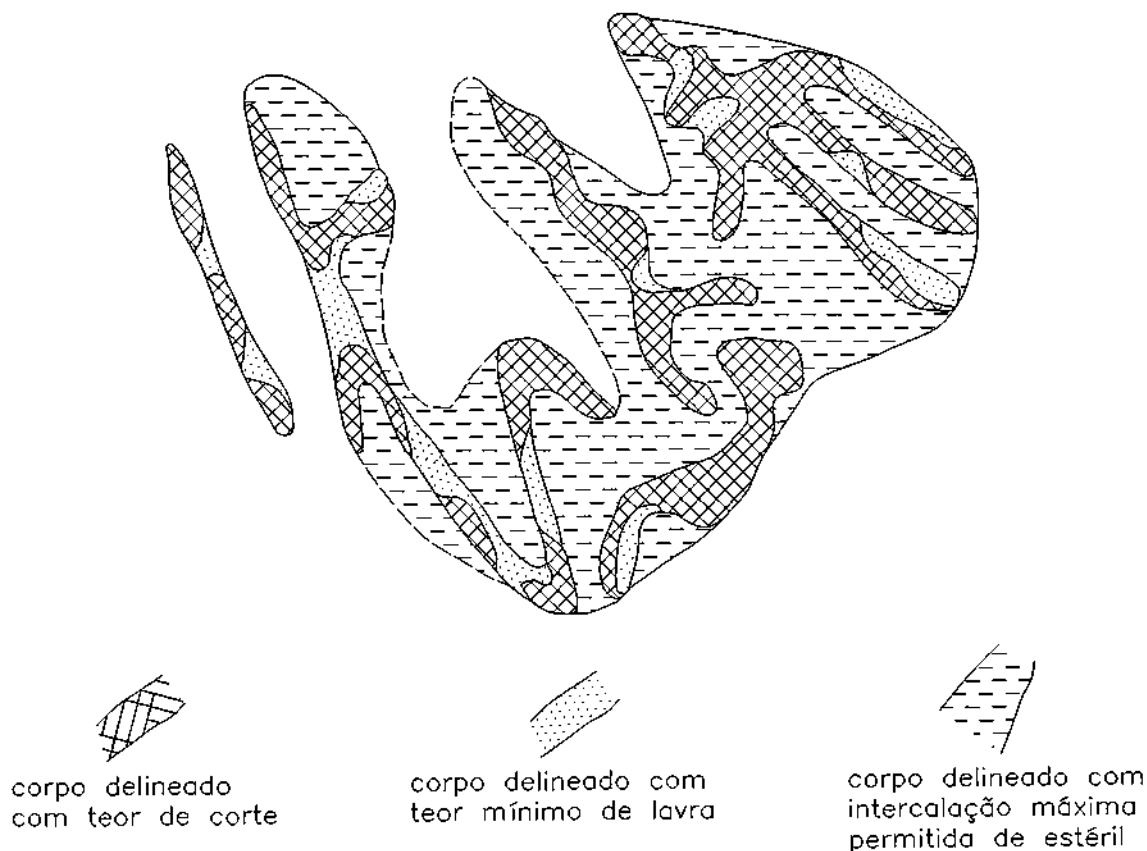


Fig. 4.4 Delineação de um corpo filoneano, adotando-se como critério de demarcação a espessura máxima permitida de estéril contido.

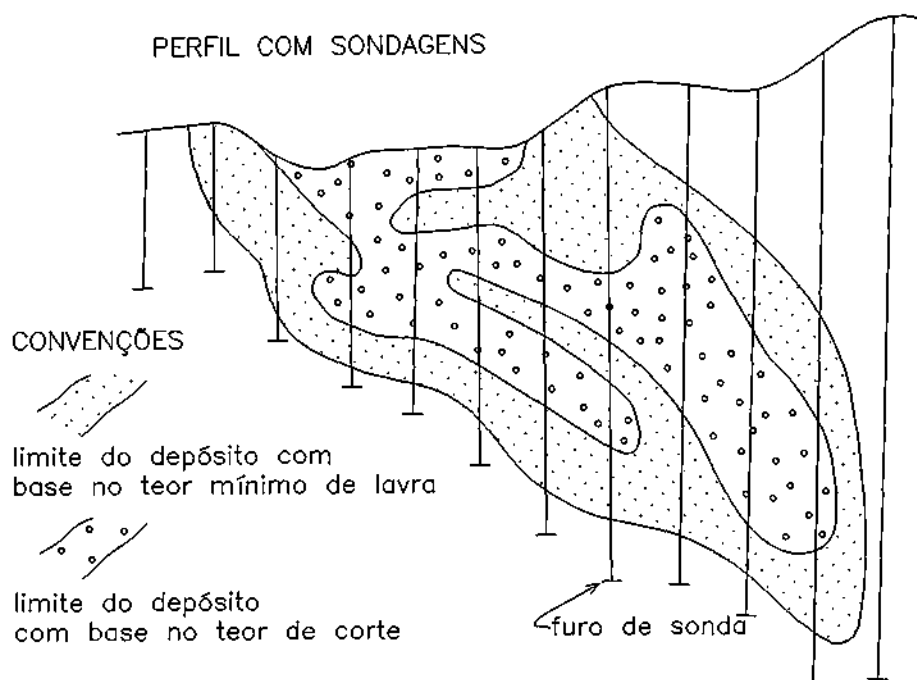


Fig. 4.5 A adoção de um teor mínimo de lavra torna contínuo e de forma simplificada o corpo mineral. O corpo transiciona continuamente para a encaixante.

PERFIL COM SONDAGENS, POÇOS E GALERIAS

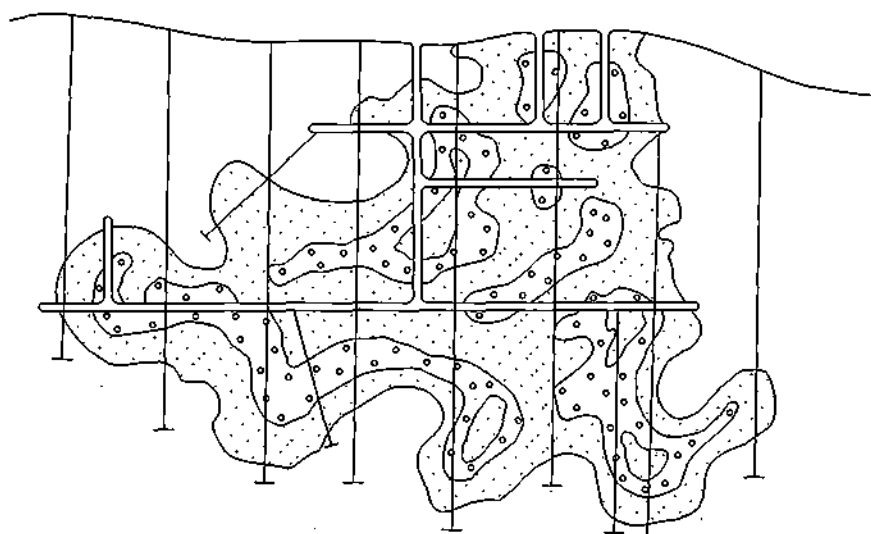


Fig. 4.6 A jazida mineral definida pelo teor de corte é segmentada em corpos menores complexos. A adoção de um teor mínimo de lavra torna contínuo o corpo com reservas muito maiores e de teor mais baixo. Não há transição corpo-encaixante e os contatos são irregulares. Símbolos iguais aos da Fig. 4.5.

Tabela 4.2. Incrementos de estéril contido e consequentes variações do teor médio e de reservas.

Espessura Máxima de Estéril Contido (m)	Teor Médio (% em volume)	Reservas de Pegmatito (em m ³)	
0,0	9,00	84.000	
0,5	8,25	77.000	
1,0	7,50	70.000	
1,5	6,75	63.000	
2,0	6,00	56.000	Limite
2,5	5,25	49.000	
3,0	4,50	42.000	

Teor de utilização (céu aberto)

O conceito de teor de utilização tem aspectos a ver com o estabelecimento do contorno final da cava, planejamento sequencial da lavra, beneficiamento do minério e fluxo de caixa da empresa.

No caso da jazida em exemplificação vamos admitir que o contorno final da cava será obtido via otimizante e, no estabelecimento da sequência em que os vários blocos serão desmontados, deve-se responder à seguinte pergunta: O que será tratado? Que material será utilizado? Novamente, a resposta está detalhada em Valente (1982), pelo que adiante nos limitamos à apresentação das principais conclusões.

Dentre os materiais desmontados, com certeza vai-se encontrar blocos mineralizados e não mineralizados. Estes últimos, como é evidente, serão lançados às pilhas de estéril. Já os blocos mineralizados constituem o problema: o que se deve utilizar? Como é óbvio o teor de alimentação da usina não pode estar aquém do teor marginal, pois então não se pagarão as despesas subseqüentes.

Surge assim a necessidade do conceito de teor de utilização. Este teor, pelo visto, deverá estar compreendido entre o teor de corte e o teor mínimo. A diminuição do teor de utilização acarreta um aumento do volume a tratar (minério) e uma diminuição do estéril, pois dentro do contorno da cava, há um volume definido e conhecido.

O teor de utilização é estimado, engendrando-se várias admissões, que levarão a várias alternativas, das quais será selecionada aquela que melhor se coadune com os objetivos de produção e econômicos da empresa.

As várias alternativas de sequenciamento das operações de lavra são montadas e analisadas nos seguintes aspectos:

- Escolhem-se vários teores entre t_m^* e t_c^* ;
- Montam-se os fluxos de caixa correspondentes às alternativas vislumbradas; e
- Aplicam-se critérios econômicos para escolher o

melhor fluxo de caixa (v. g. critérios do valor atual, taxa interna de juros, crescimento de riqueza, etc).

Equação de equilíbrio econômico

a) As equações (7) e (8) podem ser escritas na forma:

$$\begin{cases} B_{im} = L_i [P \cdot \bar{t}_i \cdot \bar{r}_i - (C_L + C_{BR_i} + C_B + K + K_f)] \\ B_{ie} = -L_i \cdot C_L \end{cases}$$

b) A relação de mineração R é dada por $R = e/m$ e, portanto, $e = mR$.

c) A relação limite (*break-even stripping ratio*), conforme já definida anteriormente, vale, para a jazida em exemplificação:

$$R_L = \frac{C_{Ms} - (C_L + C_{BR_i})}{C_L} = 8,83$$

d) A lavra de n_m blocos de minério e n_e blocos de estéril dá origem à equação de equilíbrio econômico que pode ser escrita:

$$B_T = n_m L_i P \bar{t}_i \bar{r}_i - [n_m L_i (C_L + C_{BR_i} + C_B + K + K_f) + n_e L_i C_L] \quad (11)$$

onde B_T é o benefício correspondente ao aproveitamento conjunto dos n_m blocos de minério e n_e blocos de estéril; $\bar{t}_i$ e $\bar{r}_i$ são o teor e recuperação médias dos blocos de minério considerados.

A equação (11) pode ainda ser escrita na forma:

$$\begin{aligned} B_T &= n_m L_i P \bar{t}_i \bar{r}_i - n_m (C_L + C_{BR_i} + C_B + K + K_f) \\ &\quad - n_e R L_i C_L \\ \therefore B_T &= n_m L_i \{ P \bar{t}_i \bar{r}_i - [C_L (1 + R) + C_{BR_i} + \\ &\quad + C_B + K + K_f] \} \end{aligned} \quad (12)$$

Teor limite ou teor de corte subterrâneo

Define-se como teor limite ou teor de corte subterrâneo, o menor teor que compensa economicamente a lavra subterrânea.

Assim, com base na expressão (12) e fazendo $B_T = 0$, vem:

$$R = R_L, \bar{t}_i = \bar{t}_L \text{ e } \bar{r}_i = \bar{r}_L$$

$$P \bar{t}_L \bar{r}_L [C_L (1 + R_L) + C_{BR_i} + C_B + K + K_f] = 0 \quad (13)$$

$$\bar{t}_L = \frac{C_L (1 + R_L) + C_{BR_i} + C_B + K + K_f}{P \bar{r}_L} \quad (14)$$

em que:

$\bar{t}_L$ refere-se ao teor limite procurado

$\bar{r}_L$ recuperação média quanto $\bar{t}_i = \bar{t}_L$

A determinação do teor limite, faz-se facilmente com apoio na expressão (13). Assim, substituindo-se letras por números, vem para a jazida em exemplificação:

$$114\,019 \bar{t}_L (1,3151 + 0,0895 \ln \bar{t}_L) - [43,41 (1 + 8,83) + 12,17 + 120,21 + 74,24 + 50,10] = 0$$

$$149946,39 \bar{t}_L + 10\,204,70 \bar{t}_L \cdot \ln \bar{t}_L - 683,44 = 0$$

Com auxílio do método de Newton-Raphson, chega-se facilmente ao valor de teor limite que vale:

$$\bar{t}_L = 0,006892673 \text{ ou } \bar{t}_{pL} = 0,69\%.$$

Comentários e conclusões sobre os fatores examinados

A opção de se lavar a céu aberto, em subsolo, ou não se lavar, é governada pela relação de mineração e pelos teores limite, de corte e mínimo. A Figura 4.7 resume o conjunto das opções, usando os números e valores da jazida em exemplificação.

A fronteira entre a lavra a céu aberto e a lavra em subsolo é definida pela relação de mineração limite (R_L) que, no caso, para a conjuntura tecnológica e econômica considerada vale 8,83.

Se o bloco tecnológico (ou painel) estiver gravado por uma relação de mineração R superior a relação de mineração limite ($R > R_L$) e se o respectivo teor t_i^* for igual ou superior a t_L (no caso considerado, o teor limite foi calculado em 0,69%), o bloco será lavrado subterraneamente. Se $R > R_L$ com teor do bloco inferior ao teor limite, não há lavra pois, se houvesse, conduziria a prejuízos econômicos.

Se a relação de mineração for inferior a relação de mineração limite, várias situações há que se considerar:

a) Quando $R < R_L$ e o teor do bloco t_i^* for igual ou superior ao teor de corte ($t_i^* \geq t_c = 0,33\%$) o bloco será lavrado a céu aberto.

b) Quando o teor do bloco t_i^* estiver compreendido entre o teor marginal e o teor de corte, ou seja, quando $t_m^* \leq t_i^* < t_c^*$, aplica-se o conceito de teor de utilização (t_u^*). Os estudos de processo mostraram que o concentrador é capaz de concentrar minério com teores inclusive inferiores ao teor mínimo, embora esta operação não redunde em lucro. Assim sendo, considera-se $t_u = t_m = 0,28\%$ e desta forma, caso o bloco considerado caia dentro do volume da cava, ele é desmontado e conduzido à usina.

c) Finalmente, por razões de ordem econômica, não se aproveita, em hipótese alguma, materiais com teores inferiores ao teor mínimo, sendo pois estes blocos considerados estéreis.

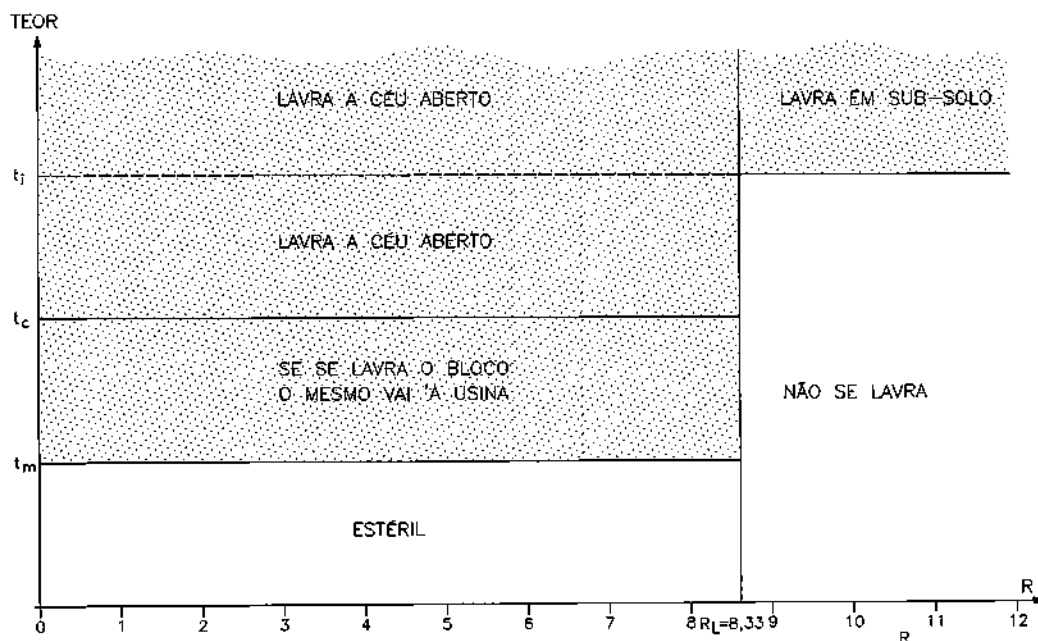


Fig. 4.7 Opções de lavra. Segundo Valente, 1982

Beneficiamento e recuperação

Durante a britagem, moagem e concentração, parte do mineral-minério é perdida no processo de cominuição e é levada para o bota-fora, junto com os minerais da ganga. Uma das causas dessa perda ocorre devido ao grau de liberação do mineral-minério e se é necessário moagem mais fina, isso pode inviabilizar o material, por causa do custo.

O processo de concentração também provoca perdas, por causa da tipologia do minério.

A recuperação é a relação entre a quantidade de metal recuperado na concentração e a quantidade de metal da alimentação, expressada em percentagem. Uma expressão geral para a recuperação é estabelecida, a seguir.

Sejam ta o teor de alimentação, tc o teor do concentrado e tr o teor do rejeito. Uma tonelada do minério de alimentação contém ta quilos de metal ou $ta/1.000$ toneladas de metal. A quantidade de metal produzida na concentração é igual a

$$TC \cdot tc / 100$$

sendo TC a tonelagem obtida de concentrado. A quantidade perdida no rejeito é igual a

$$(1 - TC) \cdot tr$$

O teor de alimentação relaciona-se com as outras variáveis conforme:

$$\frac{ta}{100} = TC \cdot \frac{tc}{100} + (1 - TC) \cdot \frac{tr}{100}$$

logo

$$TC = \frac{ta - tr}{tc - tr}$$

Um exemplo numérico é dado a seguir. Fazendo $ta = 50\%$ (por exemplo, minério de ferro), $tc = 68\%$ e $tr = 30\%$, a quantidade de concentrado que é produzida é igual a:

$$TC = \frac{50 - 30}{68 - 30} = 0,526 \text{ t}$$

Com a recuperação na concentração (RC), conforme foi mencionada é a relação entre a tonelagem de metal

recuperado (na concentração) dividida pela tonelagem de metal na alimentação, podemos escrever:

$$RC = \frac{TC \cdot tc}{tr} = \frac{ta - tr}{tc - tr} \cdot \frac{tc}{ta}$$

Para o exemplo de minério de ferro, tem-se:

$$RC = \frac{0,526 \times 68}{50} = 0,71$$

ou 71% de recuperação. Outro exemplo é dado a seguir.

Considerando-se que US\$ 187 seja o custo para produzir concentrado com 20% Cu e US\$ 353, para produzir concentrado com 52% Zn e que a recuperação durante a concentração é de 65% (Cu), 80% (Zn) e 55% (Au), teremos:

- 1 t de minério com 1% Cu origina 0,65/100 t Cu, cujo valor é $0,65/100 \times 2.215,60 = \text{US\$ } 14,635$ e está contido em 0,65/20 t de concentrado, a um custo de $(0,65/20) \times 187 = \text{US\$ } 6,077$ m gerando lucro de $14,635 - 6,077 = \text{US\$ } 8,558$ por tonelada beneficiada.

- A mesma tonelada com 1% Zn produz 0,8/100 t Zn, cujo valor é $0,8/100 \times 964,00 = \text{US\$ } 7,712$ e está contido em 0,80/52 t de concentrado, a um custo de $(0,80/52) \times 353 = \text{US\$ } 5,648$, gerando lucro de $7,712 - 5,648 = \text{US\$ } 2,064$ por tonelada; e

- No caso do Au, cada tonelada do mesmo, minério produz 0,55 g, valendo $0,55 \times 11,32 = \text{US\$ } 6,226$. Não há custo de beneficiamento, uma vez que a recuperação se faz imediatamente após a moagem, por processo mecânico, estimando-se custo de US\$ 2,00 por tonelada de minério, com lucro de $6,226 - 2,00 = \text{US\$ } 4,226$.

De posse desses dados, podemos calcular qualquer intersecção mineralizada, em termos de seu teor de corte após concentração. Consideremos que o teor de corte corresponda a retorno (venda menos custo de concentração)

de US\$ 35,00 por tonelada tratada e que o minério tenha 1,65% Cu, 4,25% Zn e 3,5% gt Au, de modo que se pode escrever:

$$1,65 \times 8,558 + 4,25 \times 2,064 + 3,5 \times 4,226 = \text{US\$ } 37,68$$

que é superior ao teor de corte adotado para cada tonelada tratada de minério. Portanto, a intersecção é econômica.

Na Tabela 4.3 apresentam-se os resultados obtidos no caso de intersecção de corpo de minério por uma galeria amostrada segundo canal na parede. O mergulho das paredes do corpo é igual a 45° e a galeria é normal ao contato.

Tabela 4.3. Exemplo de cálculo do lucro com tratamento metalúrgico de minério complexo de Cu, Zn e Au, com base em resultados obtidos em uma galeria (valores em reais, para o ano 1994).

De (m)	Até (m)	Extensão (m)	Cu (%)	Zn (%)	Au g/t	Retorno Composto
12,50	12,90	0,40	1,54	4,15	1,50	28,08
12,90	13,75	0,85	2,72	6,25	2,50	46,74
13,75	15,10	1,25	2,45	4,70	4,70	50,53
15,10	16,20	1,10	1,90	3,5	6,00	48,84
16,20	17,15	0,95	1,75	4,60	7,50	56,16
17,15	18,05	0,90	2,25	6,15	1,30	46,34
18,05	18,25	0,20	1,15	3,50	4,70	36,93

Retorno composto ponderado para a faixa mineralizada: R\$ 56,90 - Espessura real da faixa mineralizada: 4,78 m

Acumulação e contorno industrial

Através do método chamado **acumulação**, podemos substituir a variável teor por uma unidade mista expressada como:

Espessura mineralizada (em m) x teor (%),
isto é m-%

Espessura mineralizada (em m) x teor (g),
isto é m-g

A acumulação é, pois, uma nova variável, proporcional à quantidade de metal presente em uma seção particular do corpo de minério. É muito útil quando trabalhamos com corpos de espessura variável e pequena, de forma tabular, lavrados subterraneamente; a extração do material exige uma largura mínima de trabalho, maior que a do corpo, bem diferenciado da encaixante estéril.

Se a espessura do corpo é constante não há que se fazer acumulação. Ao contrário, quando variável (geologicamente ou provocada por implantação de bancadas, por exemplo), utiliza-se a acumulação para produzir a reserva do bloco sob consideração. Assim, por definição, a acumulação é uma variável aditiva, propriedade esta muito cômoda para tratamento matemático e geostatístico.

Quando se considera uma intersecção de uma galeria ou de um furo de sonda com um corpo mineral, a acumulação corresponde à somatória dos produtos do comprimento dos intervalos amostrados pelo teor, isto é:

$$\text{Acumulação} = \sum_{i=1}^n t_i \cdot C_i$$

onde os comprimentos são expressados como comprimentos verdadeiros.

Utilizando a acumulação podemos incluir no limite industrial os corpos delgados de alto teor, uma vez que:

$$\text{EML} \cdot \text{TC} = \text{ER} \cdot \text{T}$$

onde **EML** é a espessura mínima de lavra, **TC** é o teor de corte, **ER** a espessura real do corpo e **T** o teor.

Exemplificando: se a largura mínima de trabalho é 1,5 m e o teor de corte é 8 g/m³, pode-se pensar em lavrar um corpo com 0,4 m de espessura, com um mínimo de 30 g/m³.

$$1,5 \cdot 8 = 0,4 \cdot 30$$

Para um corpo com espessura de 0,87 m, o teor mínimo será 13,8 g/m³, pois

$$1,5 \cdot 8 = 0,87 \cdot 13,8$$

Consideremos agora o cálculo no caso de um furo de sonda vertical, que corta o corpo segundo ângulo de 65° e cujas intersecções e teores são apresentadas na Tabela 4.4.

Tabela 4.4 Acumulação metálica aplicada a testemunhos de sondagem

Intervalo (m)	Espessura Real (m)	Teor (m)	Acumulação M - %
151,20-154,20	2,718	7,5	20,385
154,20-156,00	1,631	23,5	38,328
156,00-159,85	3,488	5,2	18,137
159,85-160,90	0,951	11,0	10,461
160,90-163,53	2,380	8,5	20,230
163,53-165,31	1,610	13,7	22,057
	12,778 ≡	12,78	129,598 ≡ 129,60

Examinaremos a seguir uma situação onde o conceito de acumulação é aplicado, para quatro diferentes situações, nas quais se tem cinco intersecções de furos de sonda em um corpo com mergulho de 45°. A largura mínima de trabalho é igual a 2,5 metros. Na Tabela 4.5 são apresentados valores gerados do modo seguinte:

a) Acumulação, que é o produto do teor amostrado pelo comprimento (espessura), como por exemplo:

$$16,13 \cdot 0,62 = 10$$

b) Toneladas de metal (quilos) por metro quadrado de área, que é o produto de tonelagem pelo teor, multiplicando-se o resultado por 1.000/100 ou 10 e obtendo-se o valor em quilos, como por exemplo:

$$1,674 \cdot 16,13 \cdot 10 = 270,02 \text{ kg}$$

c) O teor lavrado é calculado dividindo-se o valor da acumulação pela largura mínima de trabalho (no caso, 2,5 m).

Uma vez realizada a estimativa de quantidades para cada intersecção de sondagem, estamos prontos a incluir no contorno industrial a porção do corpo sob exame. No caso dos dados da Tabela 4.5 os seguintes comentários são de interesse.

Situação I: O corpo mineralizado, em cada furo, tem teor e espessura diferentes. Contudo, para todos os furos se tem o mesmo valor de acumulação e o mesmo teor lavrado. Note-se que a diminuição do teor é compensada pelo aumento da espessura de vice-versa. Quando se compara o teor amostrado com o teor lavrado, vê-se que apenas no caso da amostra III a estimativa é imparcial, acontecendo o mesmo, em parte, para a amostra II. O teor lavrado é imparcial em todos os casos, porque foi usada a largura mínima de trabalho como avaliador.

Situação II: Os teores e as espessuras são diferentes, o mesmo acontecendo com as acumulações, que crescem em ordem aritmética. Apenas a amostra V fornece estimativa imparcial do teor (o teor amostrado equivale ao teor lavrado). Em parte, o mesmo acontece com as amostras II e III. Para as amostras I e IV os resultados não são imparciais.

Situação III: Os teores são progressivamente crescentes, para espessuras constantes. Nenhum dos resultados da amostragem é imparcial. Quando mais elevado o teor, menor é a representatividade. Os resultados para o teor lavrado são imparciais.

Situação IV: Os teores são iguais, para diferentes espessuras do corpo. Valores amostrados são crescentemente maiores, como no caso anterior. Nenhuma amostra é imparcial.

Tabela 4.5. Cálculo do teor lavrado para diferentes situações de amostragem

Amostra		Teor Amostrado (%)	Espessura do Corpo (m)	Acumulação M - %	Volume por m ² de área	Toneladas por m ² (d = 2,7)	Quilos de metal por m ² de área	Teor Lavrado (%)
I	1	16,13	0,620	10,0	0,620	1,6740	270,02	4
	2	5,99	1,670	10,0	1,670	4,5090	200,09	4
	3	4,00	2,500	10,0	2,500	6,5090	260,36	4
	4	12,99	0,770	10,0	0,770	2,0790	270,06	4
	5	10,99	0,910	10,0	0,910	2,4570	270,02	4
II	1	16,13	0,310	5,0	0,310	0,8370	135,01	2
	2	4,99	1,670	10,0	1,670	4,5090	270,09	4
	3	4,00	3,750	15,0	3,750	10,125	405,00	6
	4	12,99	1,540	20,0	1,540	4,1580	540,12	8
	5	10,99	2,270	25,0	2,270	6,1290	673,58	10
III	1	5,00	1,500	7,5	1,500	4,0500	202,50	3
	2	10,00	1,500	15,0	1,500	4,0500	405,00	6
	3	15,00	1,500	22,5	1,500	4,0500	607,50	9
	4	20,00	1,500	30,0	1,500	4,0500	810,00	12
	5	25,00	1,500	37,5	1,500	4,0500	1.012,50	15
IV	1	8,00	0,625	5,0	0,625	1,6875	135,00	2
	2	8,00	1,250	10,0	1,250	3,3750	270,00	4
	3	8,00	1,875	15,0	1,875	5,0625	405,00	6
	4	8,00	2,500	20,0	2,500	6,7500	540,00	8
	5	8,00	3,125	25,0	3,125	8,4375	675,00	10

Largura mínima de lavra (LML)

Entende-se por largura mínima de lavra, a menor largura de minério que pode ser extraída pelo método de lavra utilizado no jazimento. Em geral, o conceito é aplicado em operações subterrâneas, mas não necessariamente. A céu aberto, diz respeito à capacidade do equipamento de lavra, em termos da largura de caçamba, por exemplo, quando se opera com pá mecânica ou com escavadeira. Se o corpo mineral tem, digamos, uma largura de 0,6 metros e a LML é de 1,2 metros, necessariamente será lavrado material de baixo teor ou estéril. É claro que se o minério do corpo tem teor médio de 8 gramas/tonelada (ouro, p. ex.), a extração, em um realce, de material de

baixo teor junto com o minério poderá ser compensada por um teor mais elevado na porção em lavra. Seja 1,9 g/t o teor no estéril ou material de baixo teor e 11,5 g/t o teor no corpo. Logo:

$$1,9 \cdot 0,6 + 11,5 \cdot 0,6 = 8,04 \text{ g/t}$$

resultado que mantém o teor médio do jazimento.

A LML é estabelecida para cada tipo de jazimento, em função do método de lavra e só é importante quando se trata de corpos delgados.

O tema da diluição de teor, como na situação acima, será retomado adiante. Observe-se que ocorreu diluição intencional, para criar uma largura lavrável que satisfaça a LML.

Arquitetura do corpo mineral e delineação

Os depósitos minerais, sob o ponto de vista de grau de dificuldade de delineação (que depende do método e da técnica usadas para tal) podem ser classificados em quatro grupos a saber: a) depósitos tabulares ou estratiformes; b) depósitos alongados; c) depósitos equidimensionais e d) depósitos inconstantes. Kreiter (1968, p. 178, p. 208-209 e p. 240-244) examina detidamente a questão e uma apreciação geral das características dos depósitos mencionados, segundo esse autor, pode ser encontrada em Grossi Sad (1986, p. 5-18).

Depósitos entratiformes

Constituem-se em corpos com duas dimensões maiores que a terceira – camadas, lentes, folhas, filões – e são concordantes com a encaixante. Classificam-se em **epigenéticos** e **singenéticos**.

Os jazimentos epigenéticos (magmáticos, metassomáticos, hidrotermais) compreendem corpos mineralizados em cromita, apatita, sulfetos (Cu, Ni, etc.), escarnitos (W, Mo, etc.), dentre outros.

Os jazimentos singenéticos compreendem depósitos sedimentares de Fe, Mn, Pb-Zn, carvões, folhelhos betuminosos, fosforita, sais diversos, gipsita, anhidrita, calcário, dolomito, etc. Em geral têm estrutura contínua e distribuição regular dos constituintes, o que não acontece geralmente com os depósitos epigenéticos. Em função do tamanho e grau de uniformidade, são chamados camadas ou lentes.

A atitude dos jazimentos tabulares varia de vertical a horizontal e podem se mostrar basculados, dobrados e falhados.

A delineação desses jazimentos é simples e feita a partir de intersecções das obras de pesquisa, cuja amostragem permite organizar documentação própria. Além do teor de corte, outros condicionantes para a delineação são a

largura mínima de trabalho e a espessura máxima das intercalações estéreis.

São corpos particularmente sensíveis à avaliação estatística ou geoestatística, visando estabelecimento dos teores médios por blocos.

Os mantos de meteorização constituem um caso especial de corpo tabular e são originados por concentração residual e/ou enriquecimento supergênico. Englobam corpos de bauxitas, caulins, manganês, ferro, silicatos e lateritas níquelíferas, etc. O contato de lava é irregular e se faz com a rocha matriz. A capa pode ou não se encontrar encoberta por estéril. Podem exibir zoneamento vertical e apresentam descontinuidades, com as porções mais ricas muito irregulares. A delineação é baseada no teor de corte, quase sempre.

Os filões são um tipo particular de corpo tabular e são classificados em **simples** e **complexos**. Os filões simples podem ter grandes dimensões e espessura uniforme, enquanto os complexos são pequenos e de espessura variável (em geral) e exibem ramificações ao longo da direção e do mergulho. Compreendem corpos mineralizados a Au, W, Co, Mo, fluorita, baritina, feldspato e quartzo, talco, cromita, etc. A traçagem desses corpos é feita através do uso combinado de escavações e sondagens, em função da morfologia e estrutura interna do corpo, que também condicionam o número adequado de intersecções e a geometria do retículo exploratório.

Para a delineação, subdivide-se o corpo em blocos definidos a partir das intersecções das obras de pesquisa; lançam-se em seções os valores da acumulação e os da largura mínima de trabalho. Utiliza-se então o teor de corte (e o ter mínimo de lavra). Métodos estatísticos e geoestatísticos só fornecem bons resultados quando as obras de pesquisa estão arrançadas regularmente e há um número expressivo das mesmas.

Em qualquer dos tipos de depósitos tabulares, o arranjo prático das obras de pesquisa se faz de dois modos: segundo um retículo ou segundo linhas ao longo do corpo. No primeiro caso, calculam-se os teores por

blocos, através da ponderação pelas espessuras. Os nós de amostragem situam-se nos vértices dos blocos, com seção basal quadrada, retangular ou triangular. Nos segundo caso, os blocos podem ser delimitados por duas galerias abertas no mesmo plano horizontal, ligadas por travessas. A espessura será obtida pela distância entre subníveis. Canais contínuos nas paredes das escavações fornecerão amostras representativas. Se há subidas e descidas, o arranjo dos blocos pode variar.

Os constituintes minerais nos corpos tabulares tendem a se distribuir de modo regular, exceto no caso dos filões, nos quais não há uniformidade; na realizada, pode ocorrer grande irregularidade na distribuição.

Depósitos alongados

Englobam corpos em forma de tubo (chaminés) e de cordão. No primeiro caso tem-se *pipes diamantíferos* e alguns jazimentos polimetálicos (Mo, Sn, metais raros). São discordantes da encaixante e de atitude verticalizada. Em seção transversal os *pipes diamantíferos* mostram contorno regular, com área menor que 0,5 km² (usualmente). Os contatos com a encaixante são bruscos e a estrutura interna é simples.

São investigados por retículo quadrado de obras de pesquisa (sondagens e poços). Em profundidade, galerias são usadas. Sua delineação se apóia em dados transpostos para planos horizontais, nos quais o teor de corte é usado como critério.

Os corpos em forma de cordão são conhecidos como *placers*. Podem ser aluviais, litorais, eluviais, coluviais (deluviais) e de talude (proluviais). Os mais interessantes economicamente são os *placers* aluviais e litorais com diamante, ouro, cassiterita, ilmenita e monazita. Usualmente o mineral de interesse é encontrado na base do canal sobre o qual se assenta o *placer*. Acima ocorrem sedimentos incoerentes, de espessura variável. Sedimentos mais novos podem recobrir os *placers*.

Como a variabilidade é maior ao longo do corpo, os

placers são investigados por meio de seções transversais. A espessura da porção mineralizada é muito pequena se comparada com a largura e o comprimento. O teor é o condicionante e após a delineação tem-se formas muito complicadas em planta, com grande irregularidade na distribuição do componente útil, que se associa a zonas de cascalho cuja morfologia se parece a tubos torcidos, veios entrelaçados, bolsões, etc., com dimensões muito variáveis.

Os *placers* são investigados por meio de poços e sondagem; o material coletado é concentrado e a delineação é função de parâmetros industriais, especialmente ligados ao método de lavra (profundidade máxima e mínima para dragagem, altura limite do bordo do corte, etc.).

Depósitos equidimensionais

Trata-se de corpos de grande tamanho, de forma complexa em seus detalhes e com distribuição irregular dos componentes minerais, que ocorrem disseminados. Incluem corpos em forma de colméia (*stocks*), bolsão e *stockwerk* de metais não ferrosos (W, Mo, Cu) e de metais raros, pirita, estanho, ouro, platina, etc. Sob o ponto de vista da anatomia de um *stockwerk*, ela é modelada por um enxame de veios de orientação variada. Bordejando cada filão há disseminação do material de interesse. O limite com a encaixante não é evidente a olho desarmado e depende dos fatores condicionantes. O teor médio, em geral, é baixo. Sondagens são usadas na traçagem.

A delineação é calcada em seções onde se registram o teor de corte, a espessura máxima de intercalações estéreis, etc.

Depósitos inconstantes

São corpos com distribuição extremamente irregular dos teores, pequeno tamanho e forma muito variada. Incluem ocorrências de berilo, mica, tantalita, etc., em pegmatitos, certos corpos de cromita e platinóides

em dunito-serpentinó, esmeralda e outras gemas em pegmatitos, scheelita em escarnitos, etc.

São investigados por escavações subterrâneas, dispostas de modo não sistemático, que seccionam o corpo segundo blocos de tamanho variado. Cada bloco é estimado individualmente, por amostragem de grande volume. O teor, quase sempre, é o único condicionante para eliminar ou não um dado bloco de contorno industrial. A lavra é feita de modo seletivo e com grande controle do teor, por todo o bloco.

Diluição

Difícilmente uma jazida é lavrada com tanto cuidado que não se extraia algum estéril junto com o minério, especialmente se os corpos são delgados. A boa prática indica que o corte de lavra não deve ultrapassar a largura do corpo. Contudo, corpos minerais não obedecem regras de boa prática. Em muitos casos o estéril pode constituir massas delgadas no interior do corpo, questão já discutida.

Se no processo de lavra utilizam-se grandes equipamentos e quando o contato estéril-minério não é óbvio, é impossível trabalhar no contato, sem incluir algum estéril. A diluição é discreta onde a encaixante é mais dura que o minério e o contato é regular; torna-se acentuada, quando ambos são brandos e o contato irregular.

A prática de lavra tem mostrado que a diluição (não intencional) é mais acentuada nos métodos que operam com abatimento do teto. Em realces, durante o desmonte, blocos do material da capa podem cair sobre o minério desmontado.

Valores usuais de diluição alcançam 5%, mas em condições desfavoráveis, podem atingir 15 a 20%.

Para cada mina, o fator de diluição pode ser calculado comparando-se teores amostrados com teores lavrados. O fator de diluição é crítico em jazidas de baixo teor ou com teor médio próximo ao teor de corte.

O fator de diluição FD pode ser expressado como

percentagem, usando-se:

$$FD = \frac{100(TA - TD)}{TD - TE} \quad \text{de modo que}$$

$$TD = \frac{100 \cdot TA + TD + FD}{100 + FD}$$

onde TA é o teor amostrado, TE o teor na encaixante e TD o teor diluído. A expressão acima só é válida quando as misturas minério/estéril são feitas a igual volume.

Exemplificando: seja 10% o teor amostrado, 1% o teor na encaixante e 6% o fator de diluição. Assim:

$$TD = \frac{100 \cdot 10 + 1 \cdot 6}{100 + 6} = 9,49$$

Uma vez que se adota um valor para o fator de diluição, ele é aplicado a todas as intersecções (de sondagens, por exemplo) ou pode ser aplicado à uma espessura média, ponderando-se o teor para as amostras tomadas junto do contato estéril-minério. O valor adotado para o fator de diluição é baseado em experiência. Em algumas minas o valor adotado é fixo; em outras, depende da espessura, como será exemplificado adiante.

Consideremos agora a seguinte questão: o teor médio lavrado em um jazimento de ferro, (por exemplo), é igual a, digamos, 64% Fe. As frentes de lavra têm minério rico (> 67% Fe) e intercalações itabiríticas ou contatos hematita - itabirito. O itabirito contém 57% Fe, enquanto a hematita, em uma frente com 65 m de comprimento, tem 67,5% Fe. Resta estabelecer a largura máxima de corte no itabirito, para manter o teor médio em 64% Fe. Podemos escrever:

$$\frac{65 \cdot 67,5 + x \cdot 57}{64 + x} = 64$$

o valor de x é igual a 23,357 m.

O fator de diluição no caso acima é igual a

$$FD = \frac{100 \cdot (67,5 - 64)}{64 - 57} = 50$$

e o teor diluído é igual a 64%.

Suponhamos que seja mantido o teor 64% Fe para lavra. A frente de trabalho tem, digamos 66% Fe e queremos determinar com qual teor podemos operar no itabirito. Aplicando a expressão do fator de diluição.

$$TE = \frac{FD \cdot TD - 100 (TA - TD)}{FD} = 60\% Fe$$

Conforme exposto, verifica-se que é possível estabelecer quais espessuras podemos combinar, de material de alto teor e de mais baixo teor, dados o fator de diluição e os teores mais alto e mais baixo. Por exemplo, se o fator de diluição é igual a 2 e se o minério tem teor de 5% e o estéril de 1%, o teor diluído é igual a 4,92%, quando se misturam volumes iguais.

Se a espessura (largura) total de lavra do minério e do estéril não é pré-estabelecida, qual é a proporção entre estéril e minério que pode ser lavrada, para o exemplo acima? Vamos admitir espessuras (ou larguras) de minério de 20 m, 40 m, 60 m, etc. Para manter o teor diluído com valor fixo de 4,92%, as espessuras (larguras) de estéril que podem ser ajuntadas ao minério são iguais à (em metros):

Minério	Estéril
20	0,408
40	0,816
60	1,224
80	1,632
100	2,040
120	2,448
140	2,856
160	3,264
180	3,672
200	4,080
etc.	

5. Métodos de delineação

Quando se utilizam obras de pesquisa na delineação de um depósito mineral, empregam-se três métodos, em função da construção, contínua ou não, dos limites. Os conceitos a seguir já foram mencionados anteriormente.

1º) **Traçagem contínua** dos limites do corpo, que são seguidos por trabalhos subterrâneos longitudinais aos mesmos, ou por escavações a céu aberto (trincheiras). O método é utilizado na traçagem de corpos pequenos, em geral.

2º) **Interpolação dos limites** entre obras de pesquisa positivas (isto é, em minério); e

3º) **Extrapolação dos limites**, fora da área de obras de pesquisa. Pode ser **limitada** (linhas de delimitação posicionadas entre uma obra de pesquisa positiva e uma negativa) ou **ilimitada** (não há obra negativa após obra positiva, pois a exploração naquele perfil foi paralisada).

As linhas que delimitam os corpos minerais são de dois tipos:

a) **Internas**, onde se tem o contorno ligando obras positivas marginais e

b) **Externas**, onde o contorno é obtido por extrapolação.

A traçagem contínua, a interpolação e a extrapolação podem se alicerçar em argumentação de cunho geológico, de cunho qualitativo-tecnológico e de cunho extrativo. Em qualquer situação é necessário desenvolver o trabalho a partir de dados obtidos através do retículo exploratório.

Se a argumentação é geológica, é necessário verificar se depósitos de morfologia tabular mostram lenticularização, permitindo então sua terminação segundo limite de espessura

zero. Em caso contrário, algum parâmetro qualitativo-tecnológico (por exemplo, teor) ou de lavrabilidade (por exemplo, relação estéril-minério) é usado. No caso de morfologia alongada, os cordões podem ser limitados na espessura zero e as chaminés (verticalizadas) exibem limites litológicos. Para depósitos de morfologia equidimensional, os limites são qualitativo-tecnológicos, em geral.

No caso de argumentação qualitativa-tecnológica os limites contemplam porções homogêneas ou de mesmas propriedades, tais como teor, presença de elementos deletérios, granulometria, etc.

Se a argumentação envolve parâmetros relacionados à lavrabilidade de depósito, ele é subdividido em porções de mesmas propriedades, como por exemplo, relação estéril-minério, profundidade máxima de lavra, taludes de lavra regidos por condições de estabilidade, etc.

Quase sempre utiliza-se uma combinação de métodos para a traçagem do depósito, como por exemplo traçagem contínua em uma porção do corpo, seguida de interpolação ou extrapolação ou uso combinado de interpolação e extrapolação. Isso é facilmente explicado: em geral não se observa de modo contínuo os limites de um depósito, especialmente em subsuperfície e seria, sob um ponto de vista econômico, impraticável acompanhar os mesmos.

Traçagem contínua

A delineação dos depósitos minerais, aflorantes ou não aflorantes, se torna tarefa simples quando o contato

estéril-minério é brusco e observável a olho desarmado. Exemplos didáticos de tais contatos e de sua delimitação podem ser citados:

a) Os contatos entre minérios de ferro de alto teor (hematitas) e itabiritos, ou entre itabiritos e dolomitos ou entre filito da Formação Batatal e itabiritos, todos eles observáveis em minas em operação na Região do Quadrilátero Ferrífero, MG.

b) Nos jazimentos de bauxita do Planalto de Caldas, MG, o contato bauxita-rocha alcalina é claramente visualizável.

c) Os corpos auríferos da Mina de Morro Velho, Nova Lima, MG, são constituídos por massas fibrosas de sulfetos, embutidas na rocha conhecida como "lapa seca" (rocha a dolomita, ankerita, siderita, calcita e quartzo), enquanto na Mina de Raposos, também em Nova Lima, tem-se formação ferrífera mineralogicamente variada, com bandas sulfetadas portadoras de ouro. Os contatos entre o minério aurífero e as encaixantes são claramente observáveis e traçáveis continuamente, nas escavações subterrâneas.

Amostragem contínua pode ser feita transversalmente à

maior dimensão do corpo mineral, através de trincheiras ou de canais lançados diretamente no mesmo, com excelentes resultados. Em subsuperfície, utilizam-se galerias para traçar os contatos entre estéril e minério.

Quando se tem transição entre o corpo de minério e a rocha encaixante, o limite é baseado em amostragem; material com teor acima de um certo valor é minério, abaixo é estéril. Nesse caso, o fator para delimitação contínua é o teor de corte.

Jazimentos de grande porte, lavrados a céu aberto, mostram favorabilidade para traçagem contínua, quando o contato estéril-minério é óbvio. Nas Figuras 5.1 e 5.2 são oferecidos exemplos de traçagem contínua dos limites de um depósito mineral.

Interpolação

O método é utilizado em seções horizontais e verticais, de preferência eqüidistantes entre si. O trabalho ganha elevada precisão, quando em uma seção vertical é possível

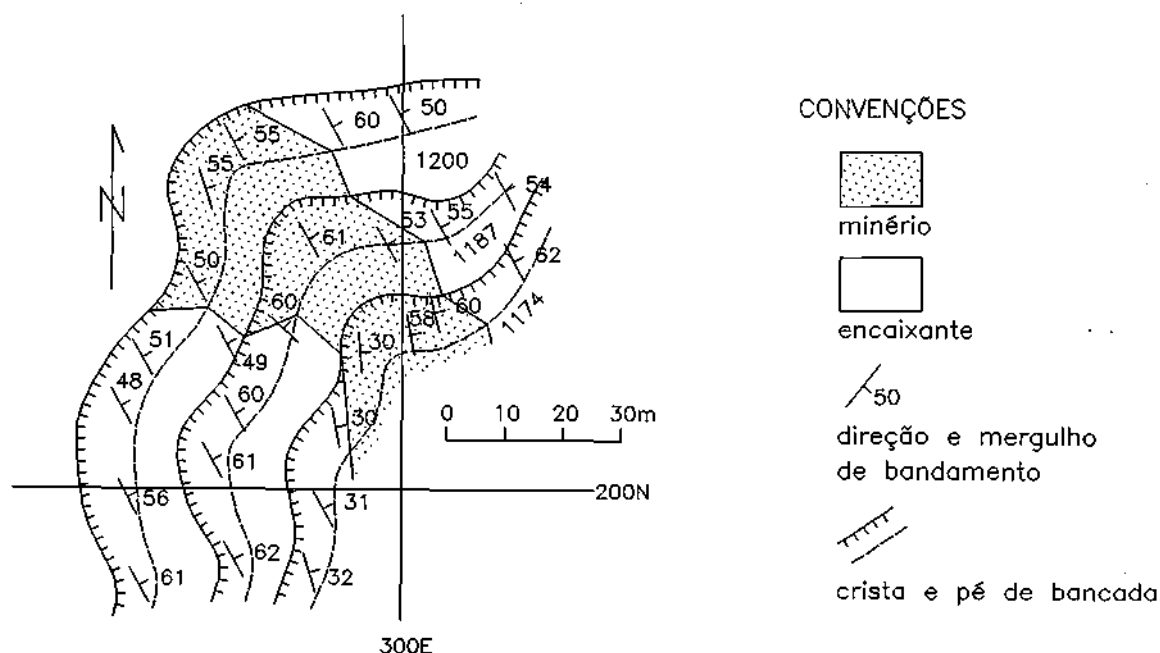


Fig. 5.1 Traçagem contínua de um corpo de minério, ao longo de bancos sucessivos de lavra

traçar o corpo mineral, utilizando limites contínuos em galerias, por exemplo. Nas galerias o contato estéril-minério é observado diretamente ou pode ser estabelecido por amostragem.

A construção dos pontos chave interpolados é realizada através de duas regras:

a) Dadas duas amostras adjacentes, obtidas através de canal em galerias, em poços, em furos de sonda, etc., o limite da propriedade sob consideração é o **ponto médio** entre as mesmas. Na Figura 5.3 ilustram-se exemplos de construção dos pontos chave. A regra é chamada "da igual área de influência"; e

b) Dadas duas amostras adjacentes pode-se proceder à interpolação linear entre as mesmas. O limite final da propriedade de interesse (por exemplo, o valor do teor de corte) pode ser construído analítica ou graficamente. A questão da interpolação foi mencionada no capítulo anterior. Na Figura 5.4 são mostrados exemplos de interpolação linear. A regra usada é a "da variação gradual da propriedade".

Interpolação e contornos

Contornos (ou isolinhas) constituem-se em um modo muito elegante de representação de propriedades e sua variação. Todos conhecem curvas de nível, contornos que expressam pontos no terreno que têm altitude igual. A união desses pontos através de linhas permite modelar, de modo muito preciso, a real forma do terreno.

O leitor percebe, de imediato, que os contornos podem ser de grande utilidade na delimitação dos corpos mineralizados. Contornos podem expressar a arquitetura do corpo sob exame, de modo muito preciso, se pontos de controle, em número adequado, espalharem-se pela superfície que limita o corpo.

Se uma dada propriedade apresenta tendência regular de variação, nada melhor que contornos para expressar tal variação.

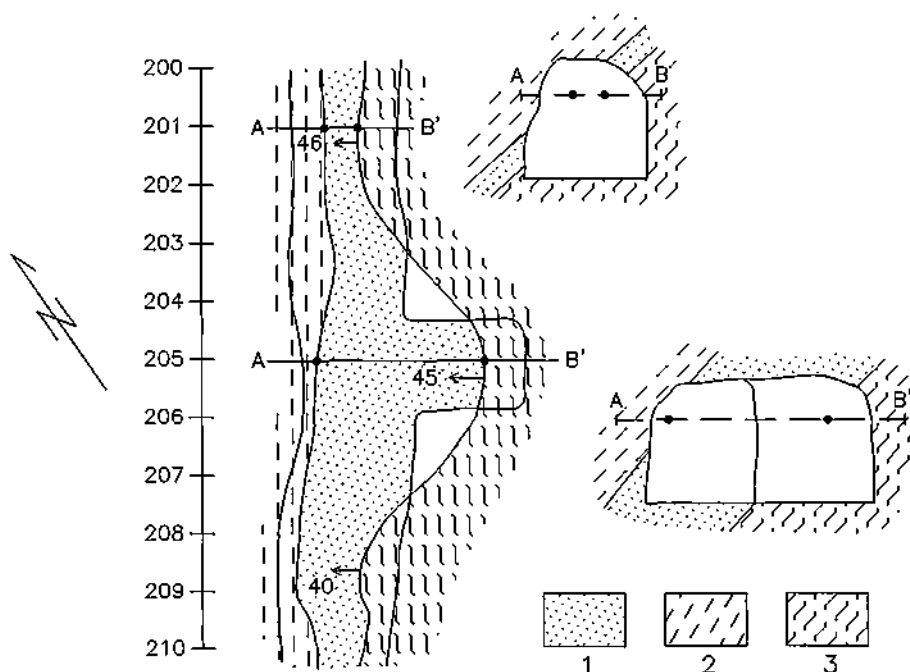


Fig. 5.2 Traçagem contínua de um corpo de minério, projetado em um plano horizontal (em tracejado, nas seções AA' e BB'). 1 - corpo de minério; 2 - encaixante da capa; 3 - encaixante da lapa.

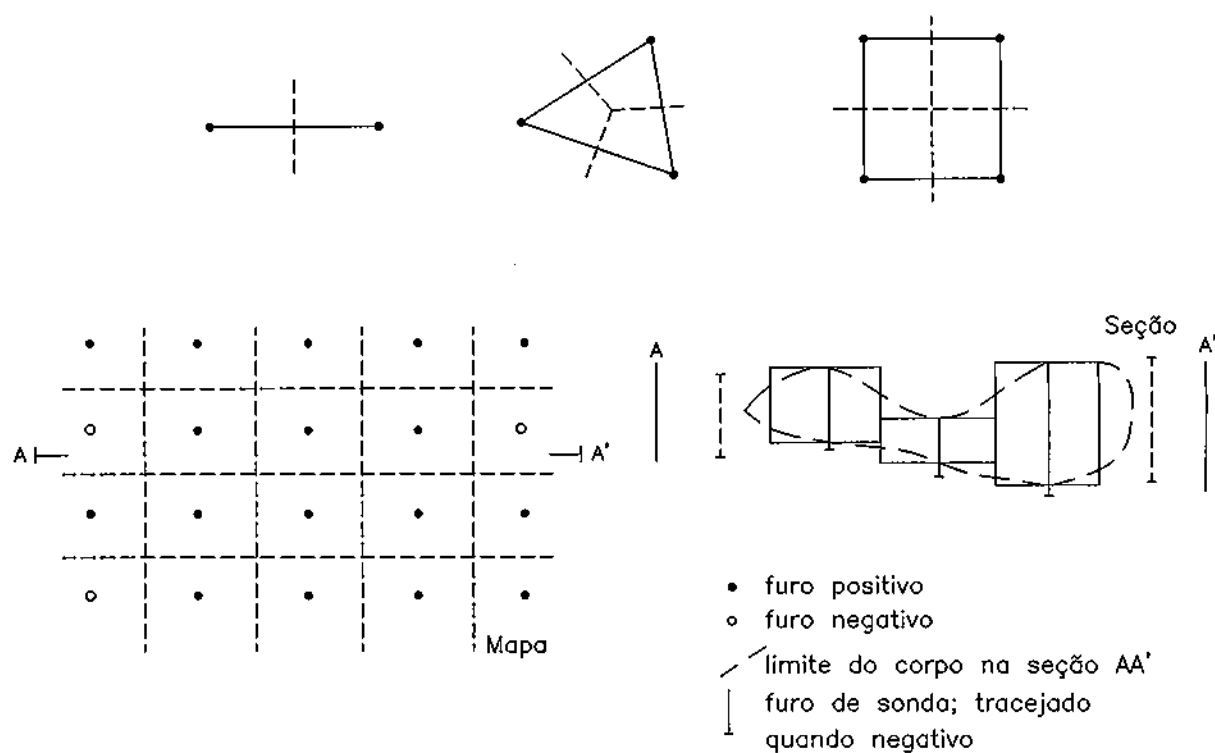


Fig. 5.3 Exemplos de uso da regra da igual área de influência, para diversos arranjos.

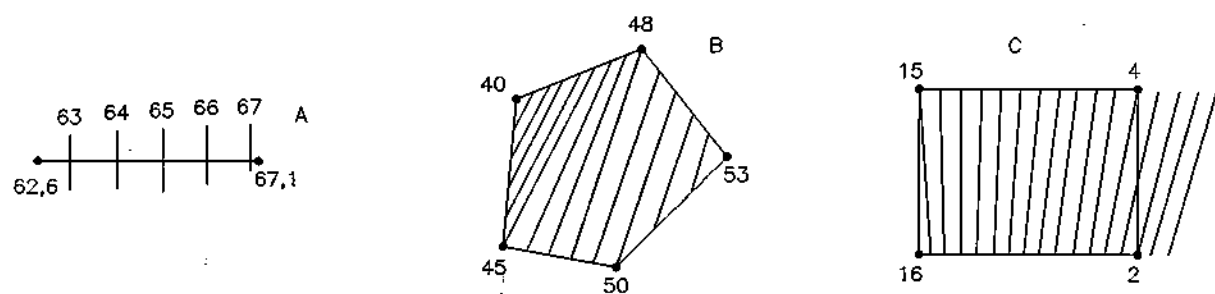


Fig. 5.4 Exemplos de uso da regra da variação gradual, com isolinhas interpoladas (em A e B). No diagrama C mostra-se interpolação e extrapolação.

A utilização dos contornos pode ser claramente entendida, se voltarmos ao exemplo de representação da morfologia de um terreno. Na Figura 5.5 mostra-se uma série de pontos cotados em um terreno (em A) e um mapa de contornos do mesmo terreno (em B). Não é necessário indagar se o usuário prefere o arranjo de diagrama A ou o arranjo do diagrama B.

Qualquer parâmetro de interesse na delimitação de um depósito mineral pode ser expressado em termos de contornos. Se o teor é o parâmetro usado na delimitação e se estabelece um dado valor, acima do qual o material é minério e abaixo, estéril, o traçado do contorno com tal valor representa de modo muito claro o limite do corpo mineral. Se, em vez disso, usamos uma combinação de espessura e teor de minério, havendo ou não correlação entre as duas propriedades, os contornos são de grande utilidade. A superposição dos mapas de contornos dessas duas propriedades origina um mapa do tipo mostrado na Figura 5.6. Para um dado valor de espessura de estéril (ou menor) e para um dado valor de espessura de minério (ou maior), o material pode ser extraído economicamente. A área pontilhada no mapa corresponde a faixa com minério lavrável, em um exemplo hipotético.

Na Figura 5.7 mostra-se uma seção com contornos que representam teores (por exemplo, de P_2O_5 em jazida de fosfato derivada de carbonatito). Outro exemplo pode ser dado (Figura 5.8): os contornos representam o contato entre rocha amolecida e rocha dura, sendo minério o material brando. Essa representação pode ser feita em seções verticais ou em mapas e é de grande utilidade na adaptação de uma cava para se extrair o minério, ajustada aos contornos.

Em todas as situações mencionadas, o parâmetro de interesse é representado em termos dos seus valores medidos em pontos de controle, que se distribuem de modo irregular ou regular.

Os contornos, que passam entre esses pontos de controle são curvas onde o parâmetro sob exame tem valor igual, ao longo de cada contorno. Em geologia

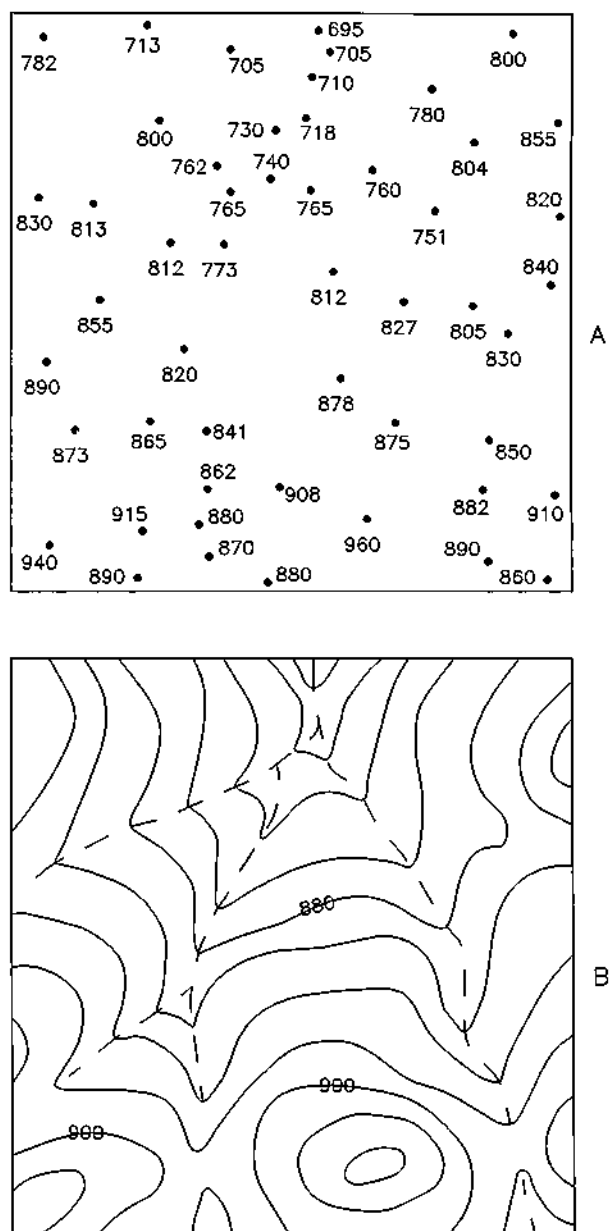


Fig. 5.5 Representação da morfologia de um terreno. Em A, pontos cotados no terreno. Em B, mapa com curvas de nível obtidas por interpolação, a partir dos dados do mapa mostrado em A (segundo Davis, 1973).

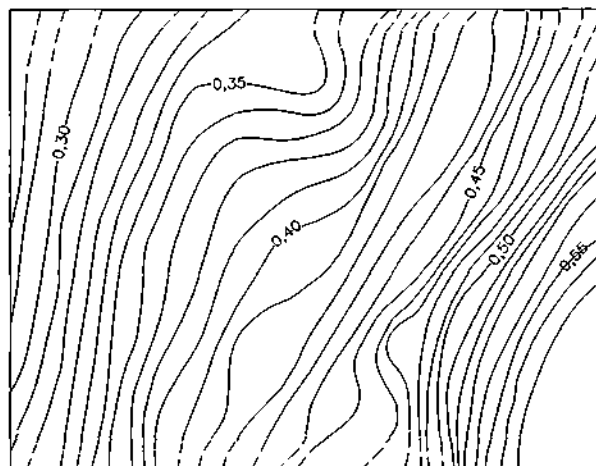
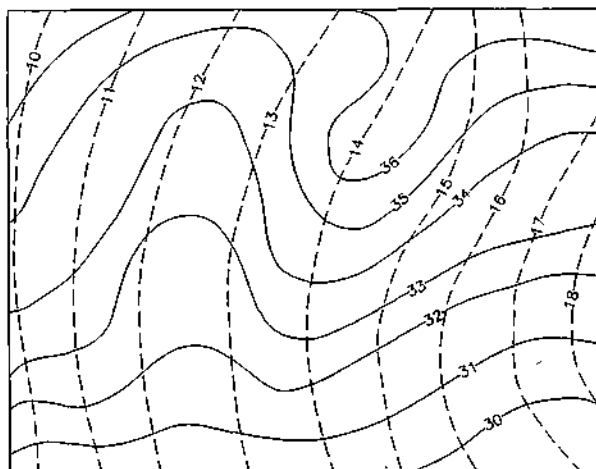


Fig. 5.6 Mapa mostrando combinação de isolinhas de diferentes propriedades. Em A, mapa mostrando isólitos do capeamento estéil (em tracejado) e do minério (linhas cheias). Em B mostra-se a razão entre os valores das curvas produzindo-se um mapa da razão estéil/minério (m^3/m^3). Aplicação: se a razão econômica é de 0,40, a curva com esse valor, no mapa B, delimita o corpo de minério.

estrutural há mapas de contorno de isólitos, de isóbatas, de isópacas, etc. Em geoquímica são muito usados os mapas metalométricos. Em geologia de petróleo, em geofísica, etc, usam-se, corriqueiramente, mapas de contornos.

Os mapas e as seções com contornos, quando construídos a partir de pontos de controle irregularmente espaçados têm menor precisão em termos de caracterização de tendências, mais facilmente discerníveis quando o arranjo é regular (segundo um retículo).

Independentemente da técnica de construção dos contornos, resta uma questão a ser avaliada: o modo de variação da propriedade, que é postulado como contínuo.

Um retículo regular de pontos, por ter maior probabilidade de detectar tendências, é implantado durante a exploração mineral. Os pontos de controle obedecem um arranjo quadrado ou retangular, em geral. Em outras situações, os pontos de controle não são regularmente organizados, por razões diversas. Nesse caso, pode-se **construir** um retículo regular, a partir de pontos aleatórios. Examinaremos algumas das técnicas empregadas no estabelecimento dos contornos, com e sem geração de retículo regular.

Técnicas de construção dos contornos

Construção manual ou mecânica dos contornos, a partir de pontos distribuídos regular ou irregularmente. Na Figura 5.9 tem-se um mapa com pontos de controle representativos de uma dada propriedade ou parâmetro (por exemplo, uma camada metassedimentar mineralizada em ouro, com valores dos pontos de controle representando o produto do teor pela espessura da camada). Na Figura 5.10 é mostrado o resultado da construção manual dos contornos, através de interpolação linear e contínua dos valores entre os pontos sucessivos, organizados segundo a rede esboçada no mapa da Figura 5.9 (ver modos de se fazer a interpolação, Figura 5.4).

Se o número de pontos de controle é elevado, os

contornos são muito precisos. Se os dados são limitados, sugere-se que os contornos sejam “interpretados”, de modo a imprimir no mapa certas tendências conhecidas ou inferidas.

Construção dos contornos a partir do estabelecimento de retículo regular, usando o inverso da distância. Se adaptarmos ao arranjo irregular de pontos uma malha regular (quadrada, retangular ou triangular), podemos calcular os valores do atributo sob consideração, para todos os nós de malha, a partir dos vizinhos mais próximos. Basta alocar “pesos” para cada valor desses vizinhos, segundo sua distância ao nó. Na Figura 5.11 exemplifica-se o método de cálculo dos pesos usando o “inverso da distância”, para um nó qualquer de uma malha. O valor procurado é, então:

$$W = (w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + w_3 \cdot x_3 + w_4 \cdot x_4 + w_5 \cdot x_5) = \\ = 0,163 \cdot 30 + 0,237 \cdot 42 + 0,150 \cdot 28 + 0,0237 \cdot 35 + \\ + 0,213 \cdot 38 = 35,43$$

O processo exemplificado é aplicado para gerar um retículo regular de pontos de controle, com base nos dados da Figura 5.9, produzindo-se o mapa da Figura 5.12. A partir dos dados segundo um retículo regular, produzimos interpolação linear e obtemos o mapa de contorno da Figura 5.13.

Visando eliminar erros na organização dos pontos para realizar o esquema do inverso da distância podemos estabelecer uma área de influência constante, por exemplo, 1,5 e, onde e é o espaçamento da malha.

A distância de um ponto de controle i a um ponto j (por exemplo, um nó da malha) é calculada facilmente, conhecendo-se as coordenadas cartesianas dos dois pontos:

$$d_{ij} = \sqrt{(x_{1i} - x_{1j})^2 + (y_{2i} - y_{2j})^2}$$

Por exemplo, no mapa da Figura 5.9 a distância entre

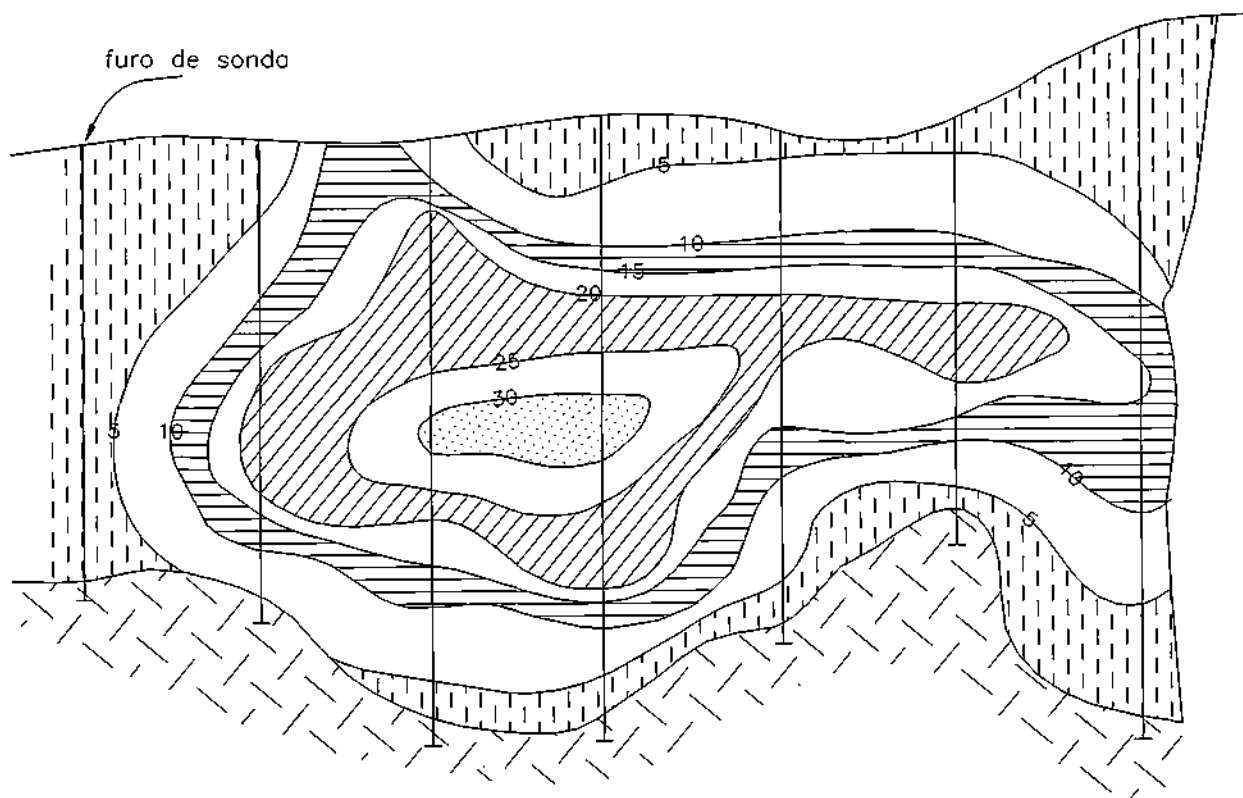


Fig. 5.7 Curvas de isoteores (em percentagem) em corpo de minério. Seção vertical.

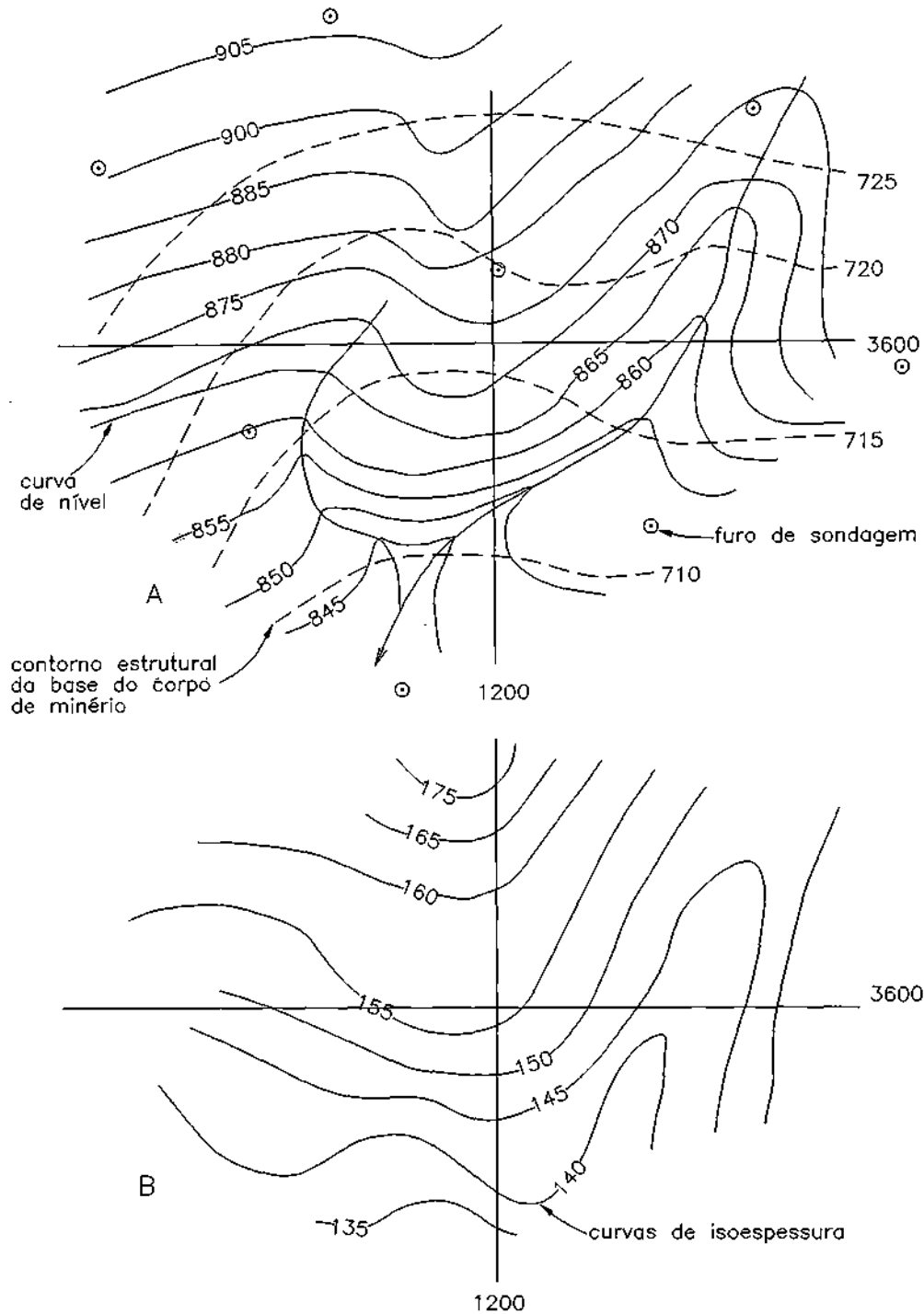


Fig. 5.8 Construção de um mapa de variação de espessura. Em A tem-se mapa de isóbatas da base de corpo de minério, constituído por rocha decomposta. Em B, mostra-se o mapa de isolitas. Valores em metros. As isolinhas foram construídas manualmente. O mapa do diagrama B foi originado a partir da diferença entre os valores das interseções entre as isolinhas estruturais e as curvas de nível.

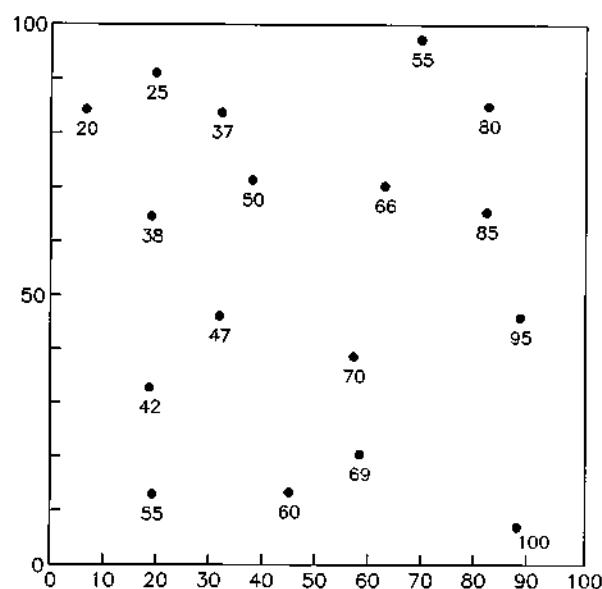


Fig. 5.9 Mapa com registro de valores de uma dada propriedade em pontos de controle.

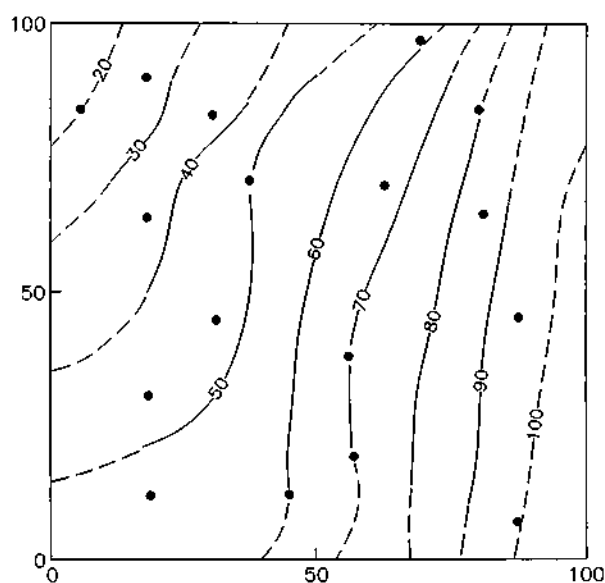


Fig. 5.10 Interpolação linear (curvas cheias) entre dados da Fig. 5.9. As linhas tracejadas são extrapoladas.

os pontos de coordenadas (20-20) e (40-40) é igual a 28,28 unidades.

Construção de retículo regular, usando IQD. A obtenção de um retículo de pontos de controle distribuídos regularmente pode ser feita usando a técnica do **inverso do quadrado da distância (IQD)**. Sejam dados (Figura 5.11) os cinco vizinhos mais próximos do nó A do retículo. As coordenadas cartesianas desses pontos de controle são as seguintes (incluindo aquelas do nó do retículo):

	X_i	Y_i	Z_i
1	75	115	30
2	105	120	42
3	130	110	28
4	80	95	35
5	110	80	30
A	100	100	

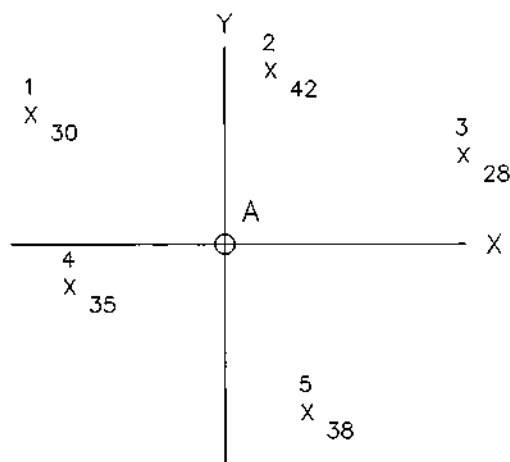
O valor do atributo, no ponto A, é igual a:

$$A = \frac{\sum_{i=1}^N (Z_i / D_{ij})}{\sum_{i=1}^N (1 / d_{ij})} = 35,50$$

No caso em tela estamos supondo que a área de influência para a escolha dos vizinhos mais próximos tem forma circular, isto é, admitimos comportamento isotrópico do atributo sob exame, para construção dos contornos. Na fórmula acima A é o valor estimado para o bloco (teor, acumulação metálica ou espessura), com base no valor de cada Z_i , em cada local de amostragem no interior da área de influência. O valor de N é escolhido pelo usuário, porém, quanto maior, maior é o peso dado às amostras mais próximas, em detrimento das mais afastadas. Quando se pretende dar “pesos” menores a informações mais distantes, basta substituir o quadrado (do IQD) por uma potência maior, por exemplo, o cubo (ficando um ICD), ou generalizando, o método é um IPD (inverso de uma potência da distância), onde P pode assumir um dos valores 2 (quadrado), 3 (cubo), etc.

Em vez de uma área de influência circular, podemos usar área elíptica, com os eixos da elipse adaptados a um retículo retangular. Nesse caso é necessário proceder a uma transformação das coordenadas dos pontos de controle, que é feita calculando-se as diferenças entre coordenadas X do ponto de controle e do nó do retículo e multiplicando-se as diferenças entre coordenadas Y por um valor K (constante), que é a razão entre os eixos da elipse (a/b , onde a é o eixo maior) ou, dito de outro modo, entre os lados do retículo retangular.

Para o caso da área de influência circular, a distância



Ponto	Distância ao nó (m)	Inverso da distância	Peso
1	29,15	0,03430	0,163
2	20,05	0,04985	0,237
3	31,62	0,03162	0,150
4	22,36	0,04985	0,237
5	22,36	0,04472	0,213
		0,21034	1,000

Fig. 5.11 Estimativa do valor do nó A, a partir dos valores de pontos distribuídos no entorno de A. Processo do inverso da distância.

de qualquer ponto X_iY_i , ao nó pesquisado A (X_jY_j) é igual a:

$$d_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

No caso da área de influência elíptica, a expressão se torna:

$$d_{ij} = \sqrt{(X_i - X_j)^2 + K (Y_i - Y_j)^2}$$

Exemplificando: sejam os pontos de coordenadas (70/115) e (100/100). A distância, com área de influência circular é:

$$d = \sqrt{(75 - 100)^2 + (115 - 100)^2} = 29,15$$

Se a área de influência é elíptica, com $K = 1,5$ (isto é, o retículo retangular tem um lado 1,5 vezes maior que o outro), tem-se:

$$d = \sqrt{(75 - 100)^2 + (1,5)^2 (115 - 100)^2} = 33,63$$

Independentemente da adoção de área de influência circular ou elíptica, um modo elegante de se verificar a presença de anisotropia direcional entre os pontos de controle é construir semivariogramas para diferentes direções do arranjo de pontos. Os eixos da elipse de influência (se ocorrer anisotropia) terão valores correspondentes aos "alcances" dos semivariogramas de maior e menor valor.

A aplicação da técnica do IQD, adotando área circular de escolha dos vizinhos mais próximos é exemplificada com o uso dos dados da Figura 5.9; para o retículo selecionado os contornos podem ser interpolados a partir dos valores dos nós (Figura 5.14 A), obtendo-se o mapa de contorno da Figura 5.14 B.

Construção de contornos através da análise de tendência. O princípio do método é muito simples: adaptar a uma série de pontos de observação ou de controle, uma superfície matematicamente definida (esférica, elipsoidal, etc.). Um exemplo muito didático é oferecido por Davis (1973) e é reproduzido na Figura 5.15, onde se tem o conceito de tendência mostrado a duas dimensões. A partir de uma série de pontos de observação, posicionados em uma linha

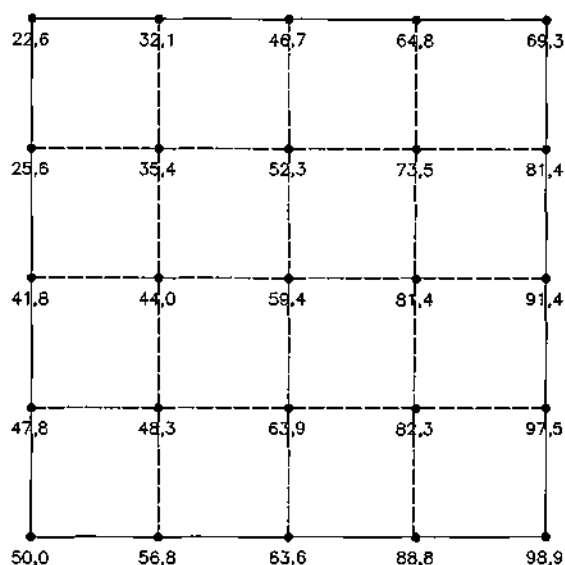


Fig. 5.12 Estabelecimento de retículo regular de pontos, a partir dos dados da Fig. 5.9, através do inverso da distância.

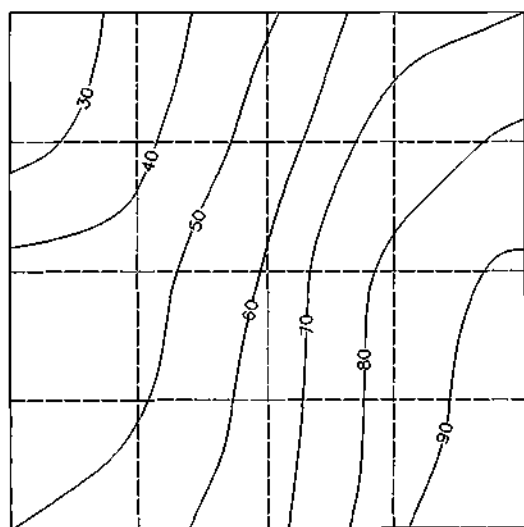


Fig. 5.13 Mapa de contornos interpolados a partir dos dados da Fig. 5.12. Comparar com mapa da Fig. 5.10.

de forma complexa, “adapta-se” linha de tendência, reta, parabólica ou cúbica.

Os pontos de controle são definidos em termos de suas coordenadas cartesianas X , Y e Z . Isso significa que o valor Z é função da posição X , Y (estamos a falar de “tendência”). Por outro lado, admite-se que ocorra variação linear da propriedade, entre os pontos de controle, isto é, a tendência é uma função linear do tipo $Y = aX_1 + bX_2$, onde a e b são coeficientes e X_1 e X_2 uma combinação dos valores das coordenadas. O valor de Y é o componente da tendência.

A escolha da equação da função linear é feita de modo que se minimizem os desvios elevados ao quadrado. O leitor certamente vê familiaridade no tema, pois basta lembrar a adaptação de uma reta a pontos de observação pelo método dos mínimos quadrados. Similarmente se adaptam planos ou outras superfícies aos pontos de controle.

A somatória dos desvios ao quadrado é igual à variância de estimação (que é minimizada). Em resumo, a análise de tendência é uma técnica estatística de regressão (múltipla).

Para uma linha de regressão (melhor estimativa de Y para valores dados de X) tem-se como equação $Y = a + bX$ (equação de uma reta), resolvida a partir das equações.

$$\Sigma Y = aN + b\Sigma X$$

$$\Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2$$

Com a determinação de a e b . As operações se estendem de 1 a N .

Para duas variáveis independente, uma superfície de tendência linear tem a forma:

$$Y = a + b_1X_1 + b_2X_2$$

Que pode ter os valores a , b_1 e b_2 determinados a partir de três equações semelhantes em forma às das equações de resolução da adaptação da reta:

$$\Sigma Y = aN + b_1\Sigma X_1 + b_2\Sigma X_2$$

$$\Sigma X_1Y = a\Sigma X_1 + b_1\Sigma X_1^2 + b_2\Sigma X_1X_2$$

$$\Sigma X_2Y = a\Sigma X_2 + b_1\Sigma X_1X_2 + b_2\Sigma X_2^2$$

A equação da superfície de tendência linear pode ser expressada como uma equação quadrática, juntando-se

outro termo, de modo que se transforma em:

$$Y = a + b_1X_1 + b_2X_2^2$$

A forma geral de uma equação quadrática (isto é, de uma superfície de tendência de segundo grau) é:

$$Y = a + b_1X + b_2X_2 + b_3X_1^2 + b_4X_2^2 + b_5X_1X_2$$

Para a qual parâmetros estatísticos a , b_1 , b_2 , b_3 , b_4 e b_5 devem ser calculados.

Para a preparação do mapa de contorno através da técnica da análise de tendência (*trend surface analysis*, TSA) determinam-se os valores inteiros de Y para valores de pontos X_1X_2 próximos, para toda a área do mapa. A união dos pontos fornece contornos.

Não é objetivo do texto avançar na questão da análise de tendência. Farto material de consulta é encontrado em dois textos clássicos de estatística em geologia, publicados por Davis (1973) e Koch & Link (1971).

O leitor poderá comparar os resultados obtidos com a construção de contornos para quatro categorias de superfícies comuns em geologia, para as quais, a partir de pontos de controle distribuídos regularmente, foram aplicadas as técnicas manual, com interpolador linear simples, IQD (com área de influência 1,5 e, onde e é o lado da malha) e análise de tendência. O retículo de pontos é quadrado. Os exemplos são apresentados nas Figuras 5.16 (A, B, C e D), 5.17 (A, B, C e D) e 5.18 (A, B, C e D).

Objetivando complementar as informações sobre a análise de tendência reproduzimos a seguir algumas observações de Davis (1973), de modo resumido:

a) Funções polinomiais são usadas por mera conveniência. As equações de cálculos dos coeficientes são facilmente estabelecidas e resolvidas pelo computador.

b) É boa prática dispor de dados cobrindo área maior que aquela de interesse para construção dos contornos, evitando-se a construção de contornos extrapolados nos limites do mapa; e

c) O arranjo dos pontos tem severo efeito na forma

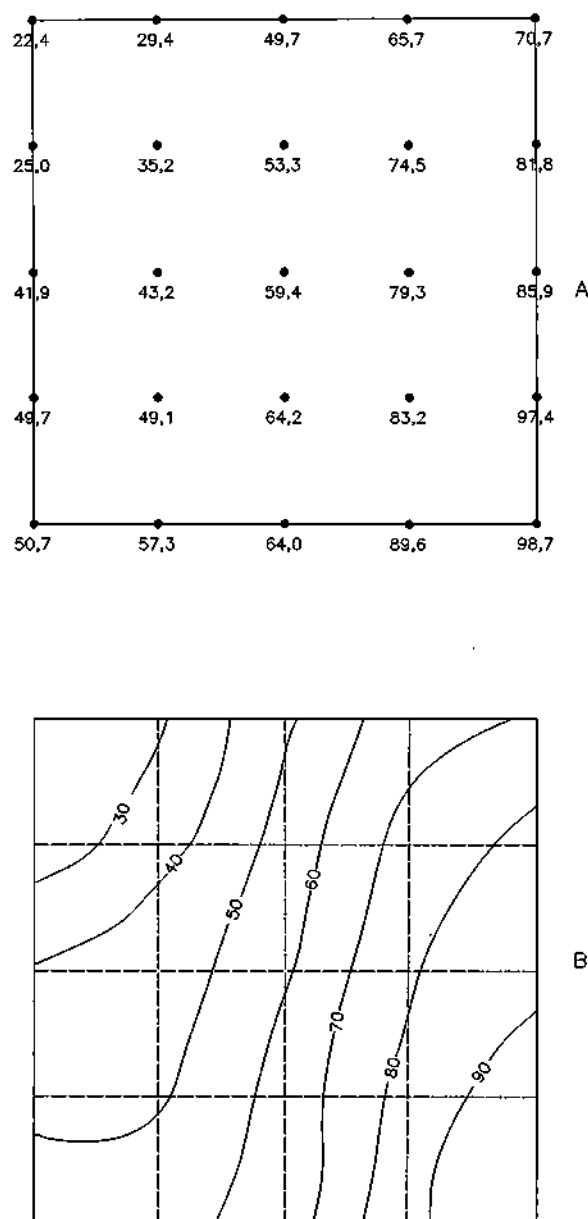


Fig. 5.14 Mapa de pontos com retículo regular de pontos (A) construído a partir dos dados da fig. 5.9, usando-se IQD. Em B, mostra-se mapa de contornos interpolados. Comparar com Figs. 5.12 e 5.13.

dos contornos. Se os pontos se distribuem por toda a área, os contornos são de boa qualidade; se os pontos se agrupam em uma parte do mapa, os contornos aparecem deformados.

Uma das questões mais problemáticas em relação aos contornos construídos com regressão múltipla é que os pontos de controle posicionam-se *fora* da superfície adaptada aos mesmos (ver mapas das figuras 5.16, 5.17 e 5.18, diagramas D).

Construção de um retículo regular de pontos com utilização da média móvel. Média móvel é uma técnica de grande

utilidade em geologia, no caso de se ter observações (de qualquer parâmetro) arranjadas segundo esquema de variação significativo e ao qual se superpõe uma variação aleatória. Isso quer dizer que o parâmetro que varia segundo esquema que tem um significado mostra valores que se autocorrelacionam, ponto a ponto, enquanto valores aleatórios são inteiramente independentes.

O princípio da média móvel é calcular uma estimativa de um dado parâmetro a partir de diversos pontos de controle adjacentes. O conjunto dos dados estimados distribui-se de modo mais suave que os da sequência

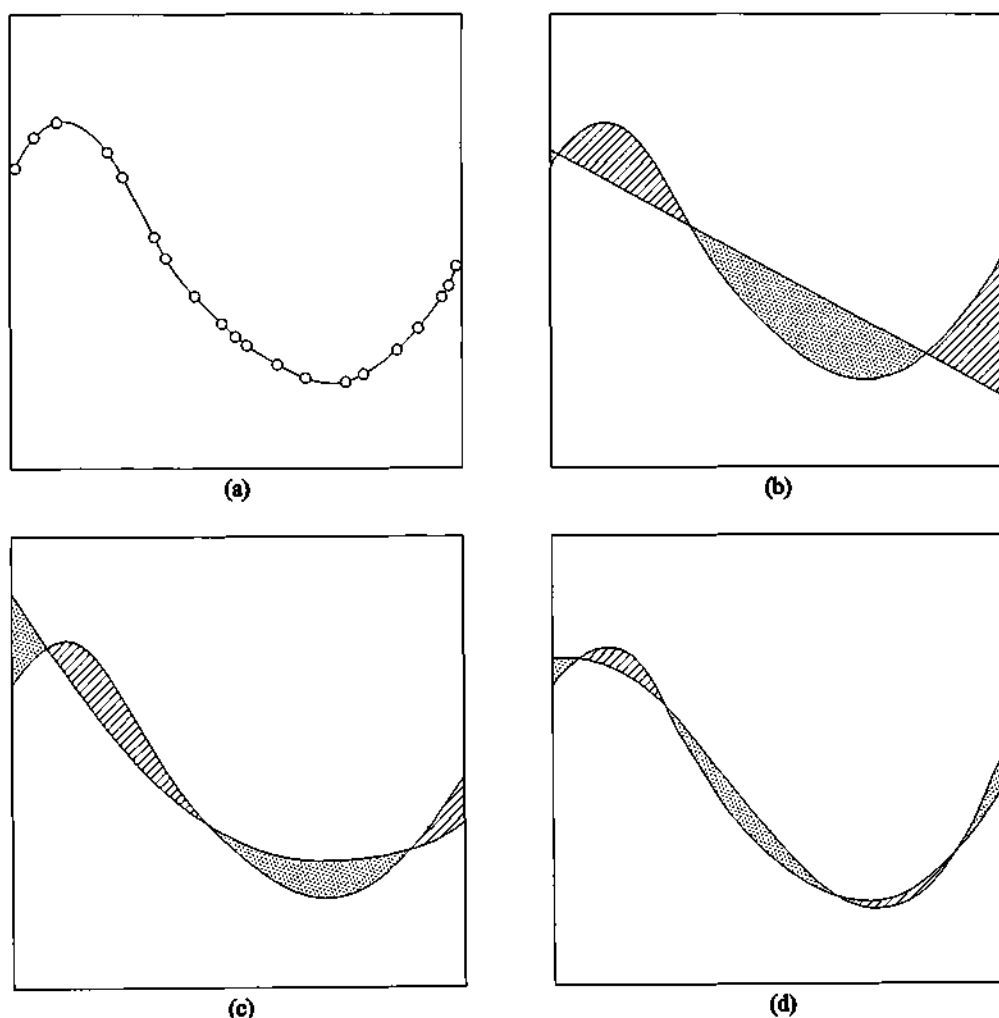


Fig. 5.15 Conceito de tendência bidimensional (segundo Davis, 1973). (a) Pontos e linha de adaptação (b) Tendência linear adaptada às observações. (c) Tendência parabólica. (d) Tendência cúbica.

original e, por isso, a técnica é chamada **técnica de filtração** ou **de suavização**.

Em exploração mineral procura-se, sempre que possível, obter dados segundo intervalos regulares, pois isso facilita o tratamento dos mesmos. Examinaremos, a seguir, o processo de suavização de dados igualmente espaçados e, em seguida, o processo aplicado a dados irregularmente espaçados. Consideremos o arranjo de pontos de controle com valores de uma dada propriedade, Figura 5.19 A e B. Para combiná-los usamos um intervalo igual a 3. Para uma melhor visualização dos resultados eles foram reproduzidos na Figura 5.19 C, e nota-se claramente que ocorre suavização na curva que representa os dados combinados, de vez que os dados originais mostram forte variação. A sequência de valores suavizados é uma **média móvel**, que exibe menor variância que a sequência original:

	<u>Média</u>	<u>Variância</u>
Sequência Original	5,000	5,64
Média Móvel	4,896	0,54

Existem diversas expressões utilizadas para o estabelecimento de uma média móvel, aplicando-se equações com um número de termos muito variável (ver, por exemplo, Harbaugh & Merriam, 1968 e Figura 5.20).

Quando a distribuição de pontos de controle se faz de modo irregular e os valores exibem flutuação acentuada e aleatória, utiliza-se uma técnica de suavização desenvolvida por Krige (1966), que é uma média móvel bidimensional. Em primeiro lugar adapta-se um retículo – de forma quadrada ou circular ou retangular – ao mapa contendo os dados. Uma “janela” de procura, com dimensões iguais a um certo número de vezes (por exemplo, duas vezes) o tamanho de cada cela é estabelecida (manualmente ou com uso do computador), conforme mostra a Figura 5.21, onde a janela é centrada no primeiro bloco a estimar. Todos os valores que se posicionam no interior da janela são ponderados segundo uma dada regra e usados para se obter o valor do ponto central. Se quisermos simplificar a média móvel, podemos simplesmente calcular a média

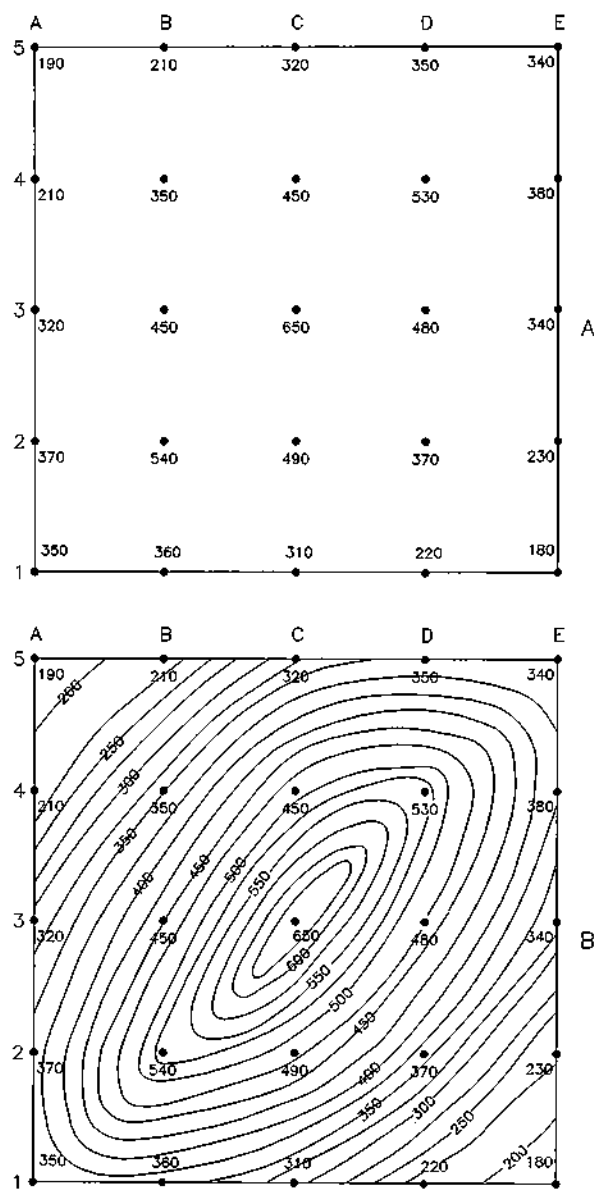
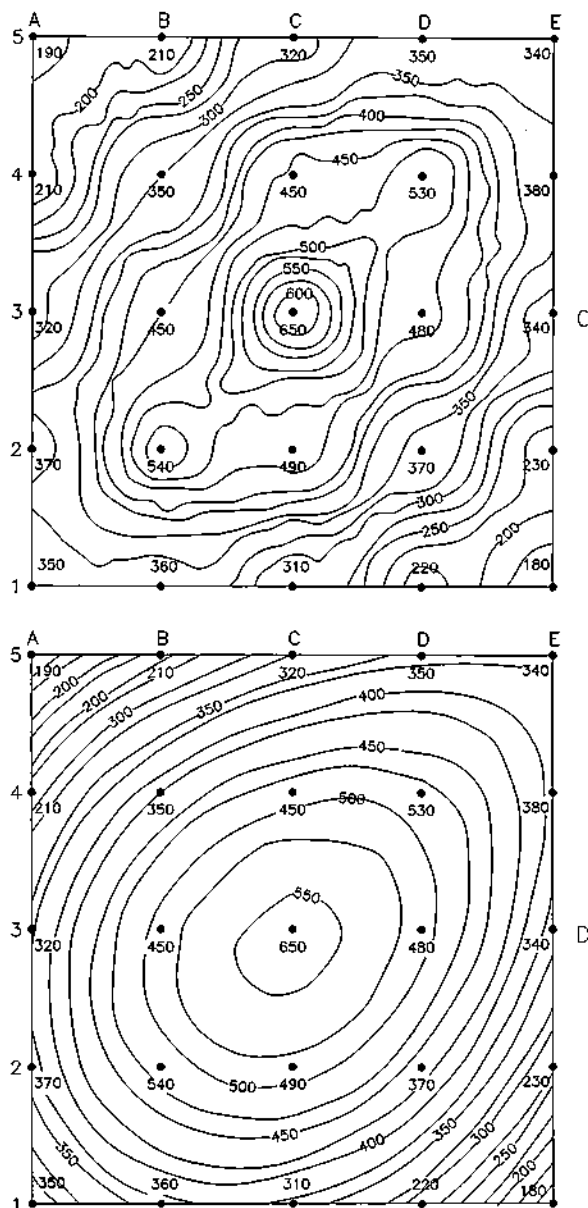


Fig. 5.16 Construção de uma superfície dômica. Em A, dados de profundidade do topo da superfície; em B, contornos manuais; em C, contornos com apoio de IQD (área de influência 1,5e) e em D, contornos com apoio de TSA.



aritmética (ou média logarítmica) dos valores que se situam no interior da janela. Quanto mais elevado o número desses valores individuais, melhor suavização é obtida. Um número acima de 15 é indicado e nesse caso podemos variar a forma e tamanho da janela (por exemplo, círculo, elipse, quadrado).

A janela é deslocada para a próxima cela do retículo e o processo de cálculo é repetido até se completar a fileira de celas, passando para a fileira adjacente e assim sucessivamente, até que toda a área do mapa seja examinada.

Se as dimensões da janela equivalem a duas vezes o tamanho das celas, 50% de superposição é alcançada em cada posição sucessiva. Quanto maior as dimensões da janela, maior é a suavização dos valores.

No exemplo mostrado na Figura 5.21 foi construído contorno com intervalo equivalente ao do teor de corte, cujo valor foi usado para limitar o corpo mineral.

Uma vez concluído os cálculos da média móvel para toda a área do mapa, pode ser feita uma comparação entre o mapa de contorno dos dados originais e o mapa de contorno com os dados da média móvel, que é mais realístico.

Construção de um retículo de pontos utilizando krigagem. A krigagem é um tipo de média móvel ponderada, que permite estimar os valores de uma variável distribuída espacialmente e o erro associado às estimativas. Apóia-se na teoria das variáveis regionalizadas (Matheron, 1965), que leva em consideração a existência de controle espacial sobre o valor da propriedade sob exame.

A base para a execução de estimativas é o semi-variograma, que exprime dessemelhanças entre os valores das amostras, através da metade do valor da somatória das diferenças (ao quadrado) de pares de pontos separados por uma distância h :

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} [x(z_i) - x(z_i + h)]^2$$

Foge completamente do objetivo do trabalho discutir

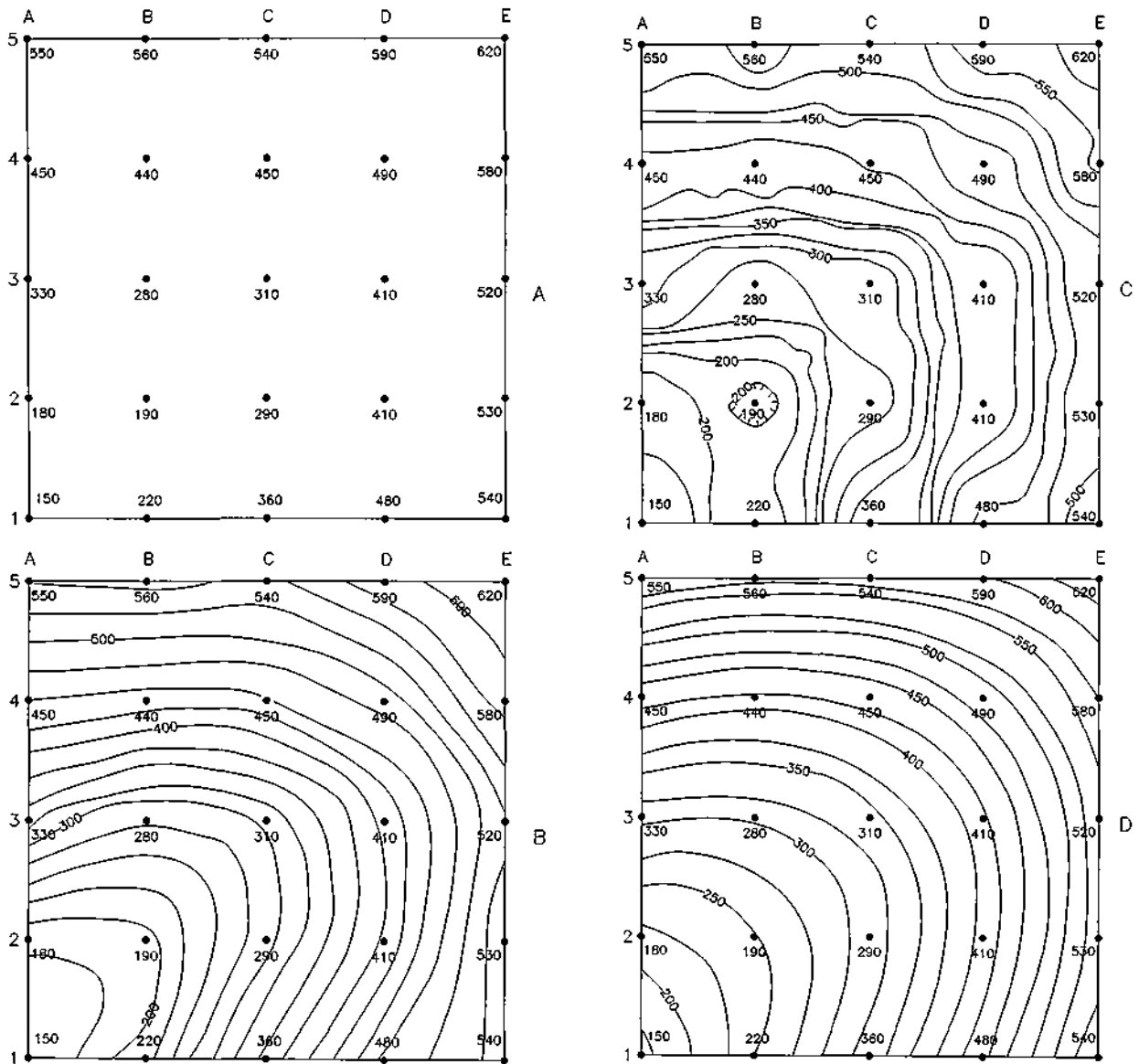


Fig. 5.17 Construção de uma superfície em concha. Em A, dados de profundidade da superfície; em B, contornos manuais; em C, contornos com apoio de IQD (área de influência 1,5e) e em D, contornos com apoio de TSA.

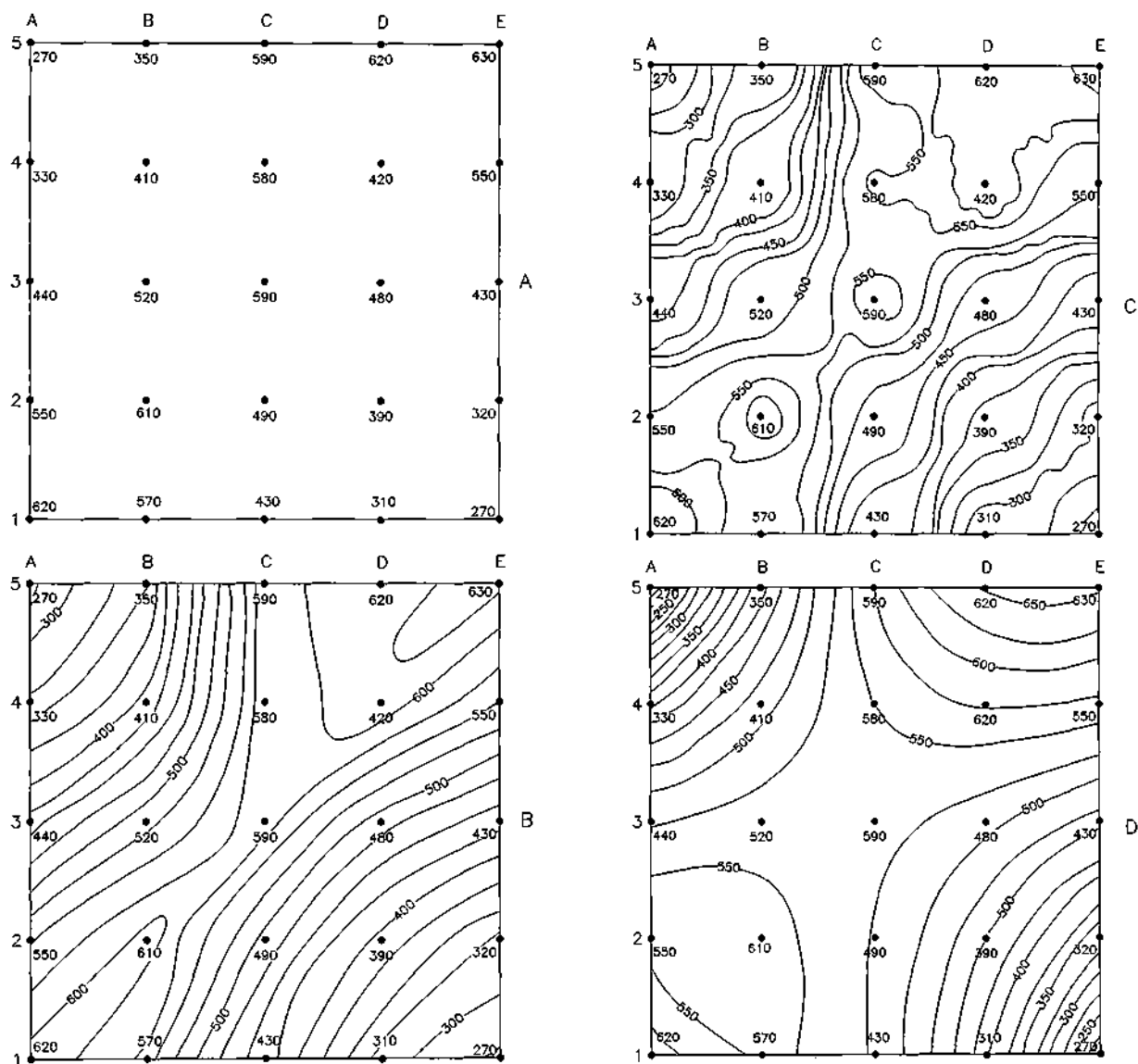


Fig. 5.18 Construção de uma superfície em sela. Em A, dados de profundidade da superfície; em B, contornos manuais; em C, contornos com apoio de IQD (área de influência 1,5e) e em D, contornos com apoio de TSA.

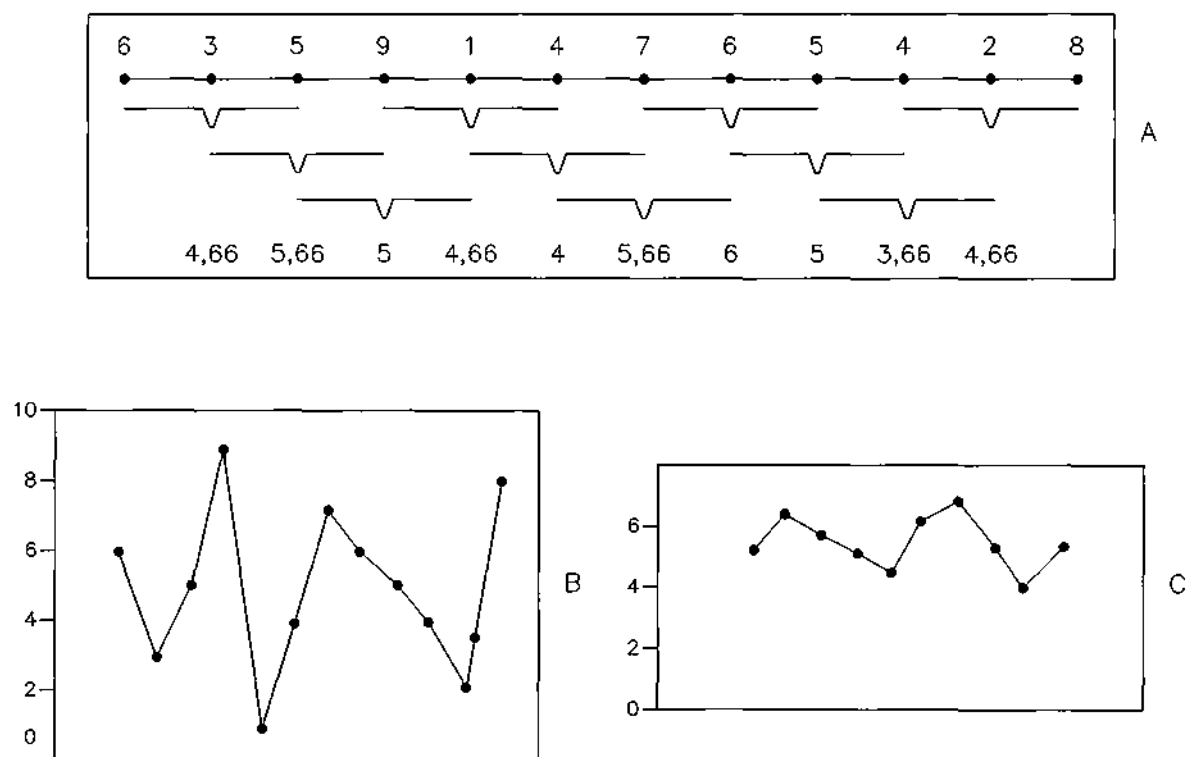


Fig. 5.19 Exemplo de média móvel.

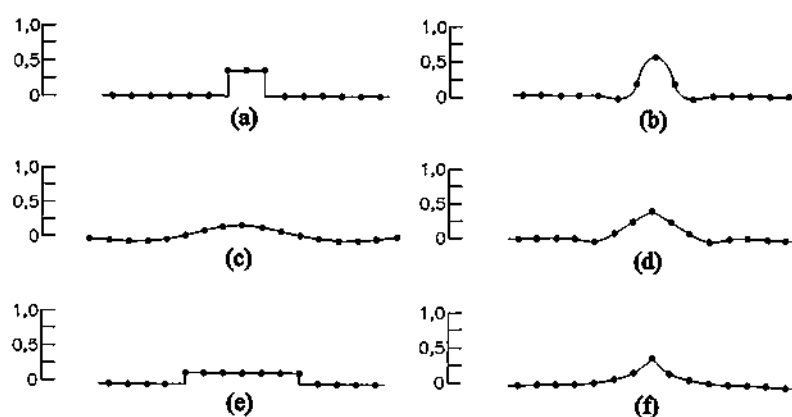


Fig. 5.20 Resultados obtidos com o uso de diferentes equações de filtragem (segundo Davis, 1973).

questões relacionadas à krigagem, como técnica de avaliação. Apenas algumas observações serão feitas e o leitor encontrará diversos textos que discutem abrangentemente a questão (por exemplo, Clark, 1979; Rendu, 1981; David, 1977; Valente, 1982; Guerra, 1988). A primeira delas é a de que existem várias e diferentes “krigagens”, sendo que a sempre referida no presente trabalho é a usualmente denominada “ordinária”.

Objetivando a construção de contornos, utiliza-se krigagem que permite a determinação da melhor estimativa linear imparcial para os valores dos nós de um retículo, utilizando fatores de ponderação K_i e se assemelha à ponderação feita pelo inverso da distância. $\sum K_i$ é igual a 1 (um) e os fatores são calculados a partir de equações simultâneas de forma.

$$\sum_{i=1}^N K_i \gamma_i - i = \gamma_i - z - \mu$$

onde $\gamma_i - j$ é o valor do semi-variograma correspondente à distância h (igual à distância entre os pontos situados em i e j) e $\gamma_i - z$ é o valor do semi-variograma sobre a distância entre o ponto a estimar Z e o ponto i e μ é um coeficiente de Lagrange.

A solução das equações fornece os fatores de ponderação K_i e um valor μ . Os sucessivos pontos do retículo são estimados pela equação de krigagem:

$$Z = K_1 X_1 + K_2 X_2 + \dots + K_n X_n$$

Na Figura 5.22 apresenta-se um exemplo de krigagem. Os dados iniciais são os mesmos da Figura 5.16 A e o leitor poderá comparar o resultado obtido.

Na Figura 5.22 A os contornos foram construídos a partir da junção manual dos isovalores krigados, dispostos segundo malha de 20 metros. Não foi possível definir a variografia direcional para o exemplo (o discreto número de dados não permitiu se obter semi-variogramas robustos) razão pela qual se trabalhou com modelo omnidirecional.

O modelo variográfico isotrópico (esférico) para os dados da Figura 5.22 A têm os seguintes parâmetros, ditos “valores fundamentais” (sendo que $C_0 + C_1 = \text{variância } a$

priori amostral):

Efeito de pepita $C_0 = 0$ (%)²

Patamar $C_1 = 19$ (%)²

Amplitude $a = 800$ metros

Na Figura 5.22 B tem-se um mapa da isovariância de krigagem representados na Figura 5.22 A. Na Figura 5.21 C mostra-se um mapa construído por simulação condicional (ver adiante).

Dois outros exemplos são apresentados a seguir. Referem-se a uma jazida de itabirito brando. No primeiro exemplo o arranjo de pontos de controle é irregular, enquanto no segundo tem-se malha regular. As coordenadas de posicionamento dos nós e os teores de Fe_T são mostrados na Tabela 5.1 e nos mapas das figuras 5.23 A e 5.24 A.

Através de krigagem um denso arranjo de pontos foi obtido em malha quadrada, estimados os valores, bem como o erro de krigagem; os resultados da krigagem aparecem representados por contornos (Figs. 5.23 B e 5.24 B). Os contornos ligam pontos com isovalores krigados. São altamente precisos e podemos delinear acuradamente a parcela dos depósitos de minério de ferro representado e de interesse (em função do teor de corte). Os mapas com linhas de contorno de erro fornecem uma medida bastante elaborada dos mesmos, em relação aos contornos representando os teores (Figs. 5.23 C e 5.24 C).

Os isovalores representados na Figura 5.23 B foram constituídos a partir do modelo de krigagem, segundo malha regular de nós espaçados de 80 metros, transformado em curvas, para facilitar a visualização. Em vista do discreto número de dados iniciais (Tabela 5.1, parte esquerda e Figura 5.23 A), trabalhou-se com esquema omnidirecional. A mesma situação encontra-se repetida para o exemplo da Tabela 5.1, parte direita, e Figura 5.24 B.

O modelo variográfico isotrópico (esférico), para o caso da Figura 5.23, é

Efeito de pepita $C_0 = 4,94$ (%) . (%)

Patamar $C_1 = 27,55$ (%) . (%)

Amplitude $a = 1242,36$ metros

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	0,2	0,5	0,6	0,5				0,1	0,5	0,1
2	0,1	0,3	1,0	1,9	0,4	0,5	0,6	1,0	2,5	0,5
3	0,6	0,9	3,5	0,8	0,5	0,6	0,9	1,3	2,0	0,1
4	0,3	0,8	2,0	3,0	4,0	3,1	1,5	2,9	0,9	0,3
5	0,5	1,2	5,3	4,0	2,6	3,8	2,0	1,0	1,0	0,2
6	0,4	0,6	2,0	3,0	6,0	7,0	3,0	4,7	1,2	0,4
7	0,2	0,5	2,4	5,0	2,5	2,0	4,0	2,1	0,1	
8	0,1	4,0	5,0	6,5	4,0	3,5	0,6	3,0	0,5	
9	0,4	0,5	1,5	1,9	2,7	0,5	0,4	0,1	0,4	
10	0,2	0,2	0,1	0,5	0,3	0,1	0,5	0,3	0,1	

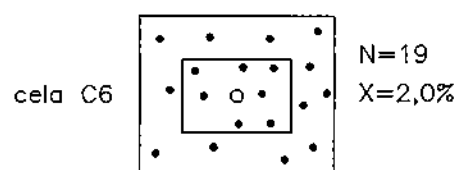


Fig. 5.21 Contorno construído a partir de valores de média móvel. Mostra-se o exemplo de uma janela retangular, com o dobro do tamanho da cela do reticulado em que foi subdividido o mapa. Para determinar o valor do centro de cada cela a janela é deslocada sucessivamente em cada fileira e em cada coluna. Se se adota uma elipse como janela, com eixos duas vezes maiores que os lados da cela, o centro da elipse deve coincidir com cada nó do reticulado sucessivamente, ao se estabelecer a média móvel. Assinala-se o contorno com valor 0,6 que equivale ao teor de corte.

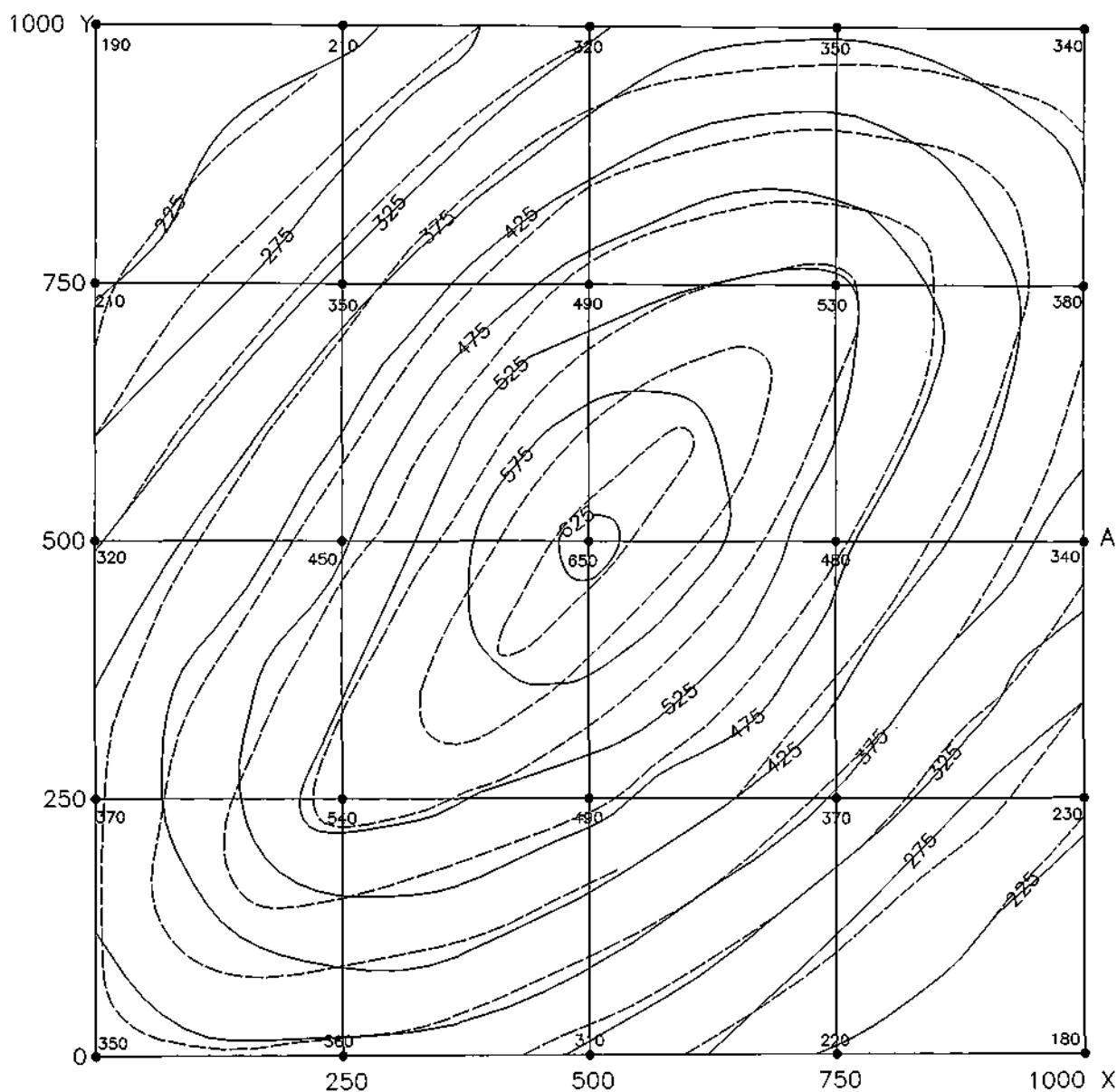


Fig. 5.22 Construção de uma superfície dômica. Em A isóbatas construídas manualmente (linhas tracejadas) e por Krigagem ordinária (linhas cheias) em malha quadrada de 20 metros. As curvas em traço cheio mostram um bom nível de correspondência, exceto na faixa de maior variabilidade (diagonal NE-SE). Na figura 5.22B tem-se o mapa de isovariância correspondente e na Figura 5.22C o mapa foi obtido por simulação condicional; ambos os mapas foram baseados em malha quadrada de 20 metros.

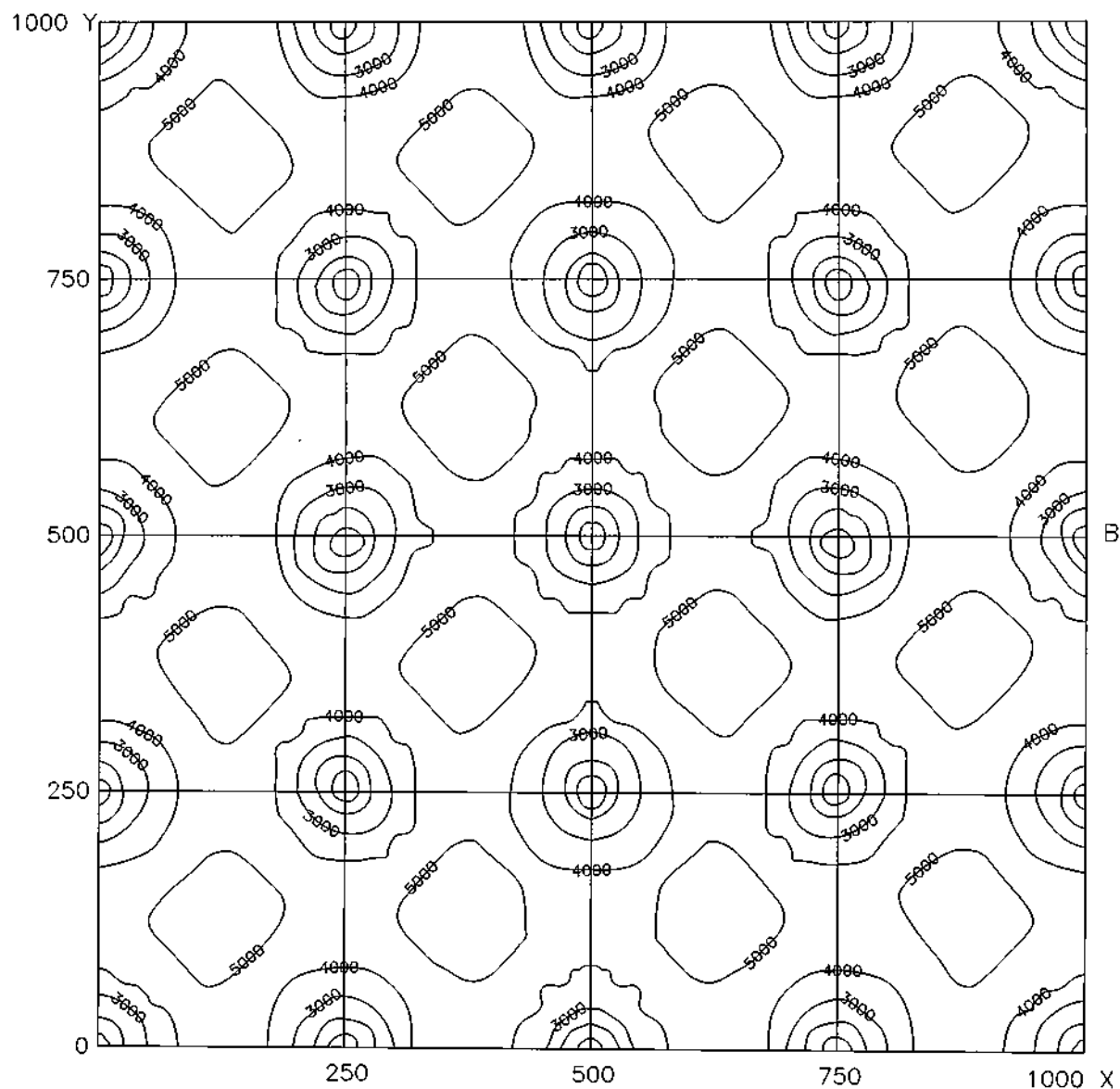


Fig. 5.22B (Continuação)

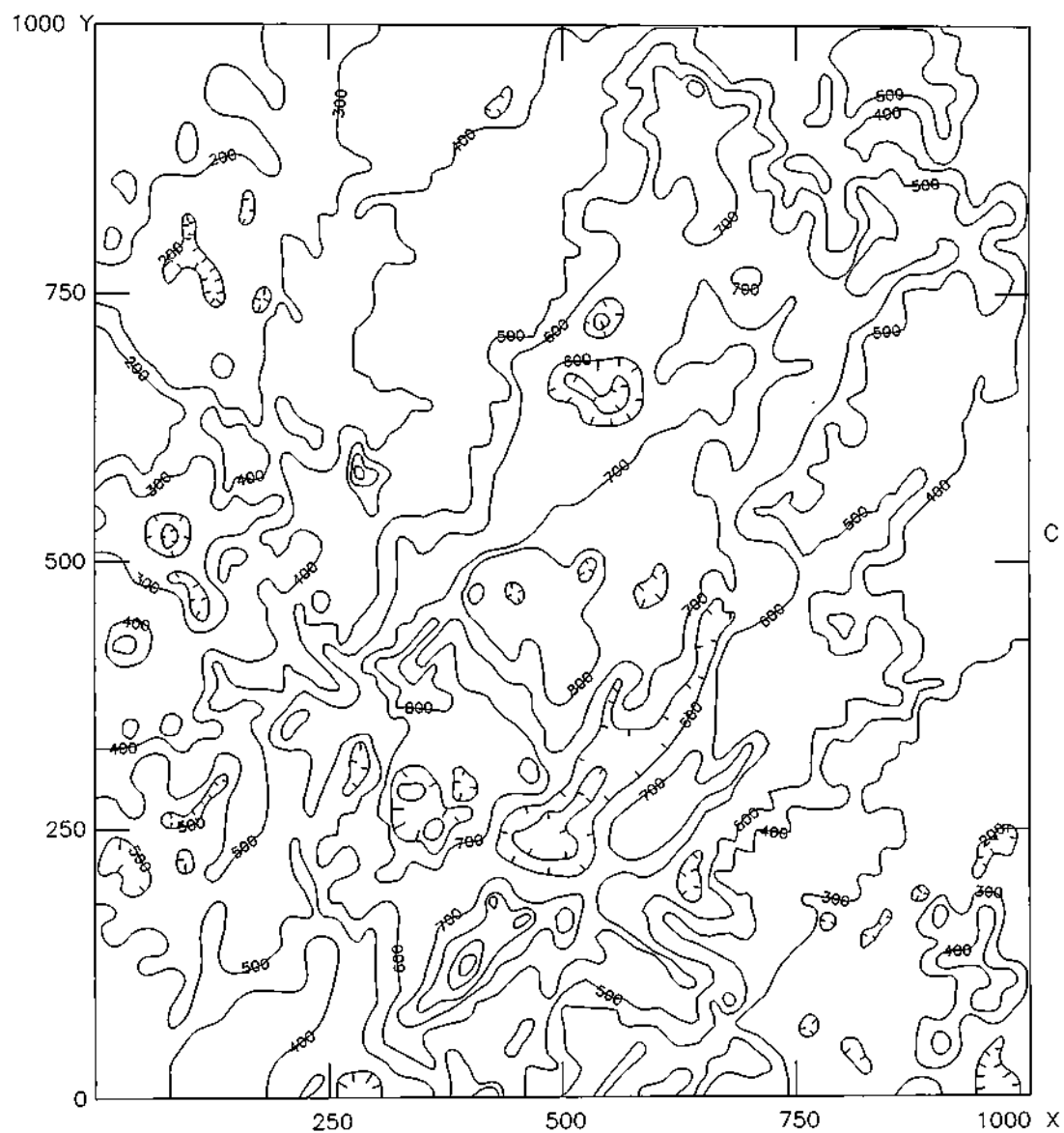


Fig. 5.22C (Continuação)

Para o caso da Figura 5.24 B as curvas de isovalores foram construídas a partir dos dados produzidos por krigagem pontual, em malha regular de 20 metros de lado, através de processo manual. O modelo variográfico isotrópico (esférico) tem os parâmetros.

Efeito de pepita $C_0 = 17,02$ (%) . (%)

Patamar $C_1 = 11,59$ (%) . (%)

Amplitude $a = 284,71$ metros

Simulação condicional

A simulação tem como finalidade “reproduzir o comportamento de um sistema complexo” (Valente, 1982). Para a consecução desse objetivo utilizam-se combinações de variáveis de entrada, obtendo-se soluções diversas, fundadas no modelo adotado. Em seguida comparam-se os resultados alcançados com aqueles do modelo que é dito “real”.

Um exemplo familiar de simulação é constituído pelas tabelas de números aleatórios. Krumbein (1969) discute a questão de modelos determinísticos e probabilísticos, comentando que é muito importante organizar “a base para muitos tipos de modelos de simulação que agora aparecem na literatura geológica. Não se pode dizer que a simulação não pode, também, ser aplicada a processos determinísticos, como no excelente exemplo da disposição de evaporitos ...”.

No caso específico de esquemas estocásticos, como aquele da deposição cíclica de uma sucessão rochosa, utiliza-se um modelo Markoviano (ou cadeia de Markov) para investigar (predizer) qual litologia específica se sucederá a outra, quando se examina uma seção, da base para o topo. Krumbein (*op. cit.*) apresenta o tema usando um ciclo de quatro componentes (arenito, folhelho, siltito e linhito). As observações começam no “estado” linhito e considerado um episódio completo de deposição é possível estabelecer a probabilidade de aparecer outra vez linhito, após siltito, ao fim de um certo número de episódios, contra

a probabilidade de ocorrência de linhito, após folhelho ou arenito.

Valente (*op. cit.*, p. 1727 – 1796) expõe de modo detalhado o tema da simulação e apresenta diversos exemplos de aplicação do conceito (em estratigrafia, na prospecção geoquímica, na avaliação do potencial ou da fertilidade de um dado trato de terreno e em lavra de minas).

Um caso especial de simulação é a chamado *simulação condicional*, na qual o que é simulado é condicionado aos valores amostrados (“reais”).

De modo resumido, a técnica de simulação condicional tem como condicionantes:

a) Com base no modelo variográfico (que aponta as autocorrelações existentes entre as amostras) procede-se à simulação das unidades (bi- ou tridimensionais), que serão objeto de novas estimações;

b) No modelo simulado, que tem o mesmo valor experimental, igual autocorrelação – mesmo variograma – em relação aos valores conhecidos e mesmo histograma, amostram-se os pontos (ou lugares geométricos) que deram origem ao modelo variográfico original;

c) Procede-se à estimativa das unidades, com base nos pontos amostrados e com o modelo variográfico original;

d) Comparam-se os resultados da estimativa com aqueles dos valores ditos “reais” das unidades simuladas.

O leitor observará que as isolinhas obtidas por simulação, para os exemplos das Figuras 4.21 C, 5.23 D e 5.24 D, apresentam variabilidade muito maior do que aquelas obtidas por krigagem. Isto é correto pois que o objetivo da krigagem é produzir o valor real provável, enquanto o da simulação é reproduzir a variabilidade da informação básica. Os métodos de interpolação (p. ex. krigagem) reduzem a variabilidade original dos dados (“efeito de suavização”).

Tabela 5.1. Coordenadas de posicionamento dos nós (pontos) e teores de Fe (%), para os exemplos das Figuras 5.23 e 5.24. Valores em metros.

Figura 5.23				Figura 5.24			
Furo	N (Y)	E (X)	% Fe	Furo	N (Y)	E (X)	% Fe
1	50	3550	51,2	1	100	100	41,4
2	100	3450	52,2	2	100	300	46,6
3	200	1700	44,1	3	100	500	52,9
4	230	3100	46,6	4	100	700	49,1
5	500	500	39,9	5	100	900	55,6
6	550	1250	40,3	6	200	200	40,3
7	400	3500	58,7	7	200	400	47,1
8	1150	1450	39,2	8	200	600	48,4
9	1250	2200	56,8	9	200	800	49,3
10	1700	1300	52,9	10	200	1000	55,1
11	2000	1800	46,7	11	300	100	56,8
12	2050	400	54,2	12	300	300	51,7
13	2150	1850	56,3	13	300	500	55,4
14	2350	1850	51,2	14	300	700	56,3
15	2450	3100	46,2	15	300	900	58,7
16	2650	2300	55,1	16	400	200	49,1
17	2700	250	56,7	17	400	400	51,3
18	2850	1050	55,4	18	400	600	52,2
19	2850	3550	48,4	19	400	800	57,3
20	2900	1500	51,7	20	400	1000	46,6
21	2900	1950	51,3	21	500	100	49,5
22	3100	1950	46,7	22	500	300	46,2
23	3200	3750	49,3	23	500	500	58,9
24	3350	1550	44,7	24	500	700	49,4
25	3300	1500	58,9	25	500	900	51,2
26	3350	150	47,1	26	600	200	52,9
27	3350	2200	49,4	27	600	400	46,7
28	3600	3250	49,1	28	600	600	44,7
29	3800	600	49,5	29	600	800	39,2
30	3850	1100	57,3	30	600	1000	54,2
				31	700	100	39,9
				32	700	300	44,1
				33	700	500	56,7
				34	700	700	51,2
				35	700	900	46,7
				36	800	200	49,3
				37	800	400	52,3
				38	800	600	55,7
				39	800	800	58,2
				40	800	1000	57,4

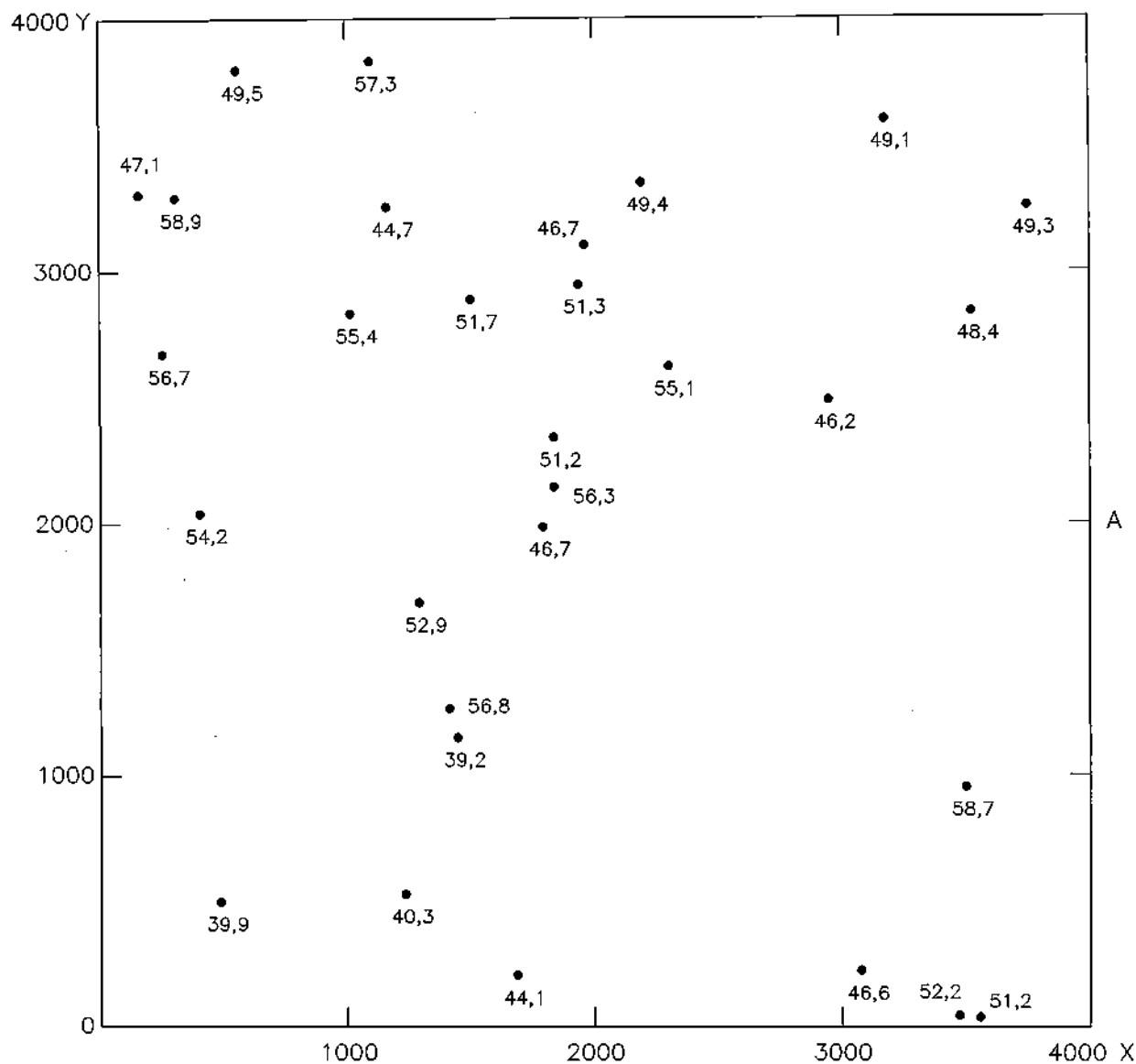
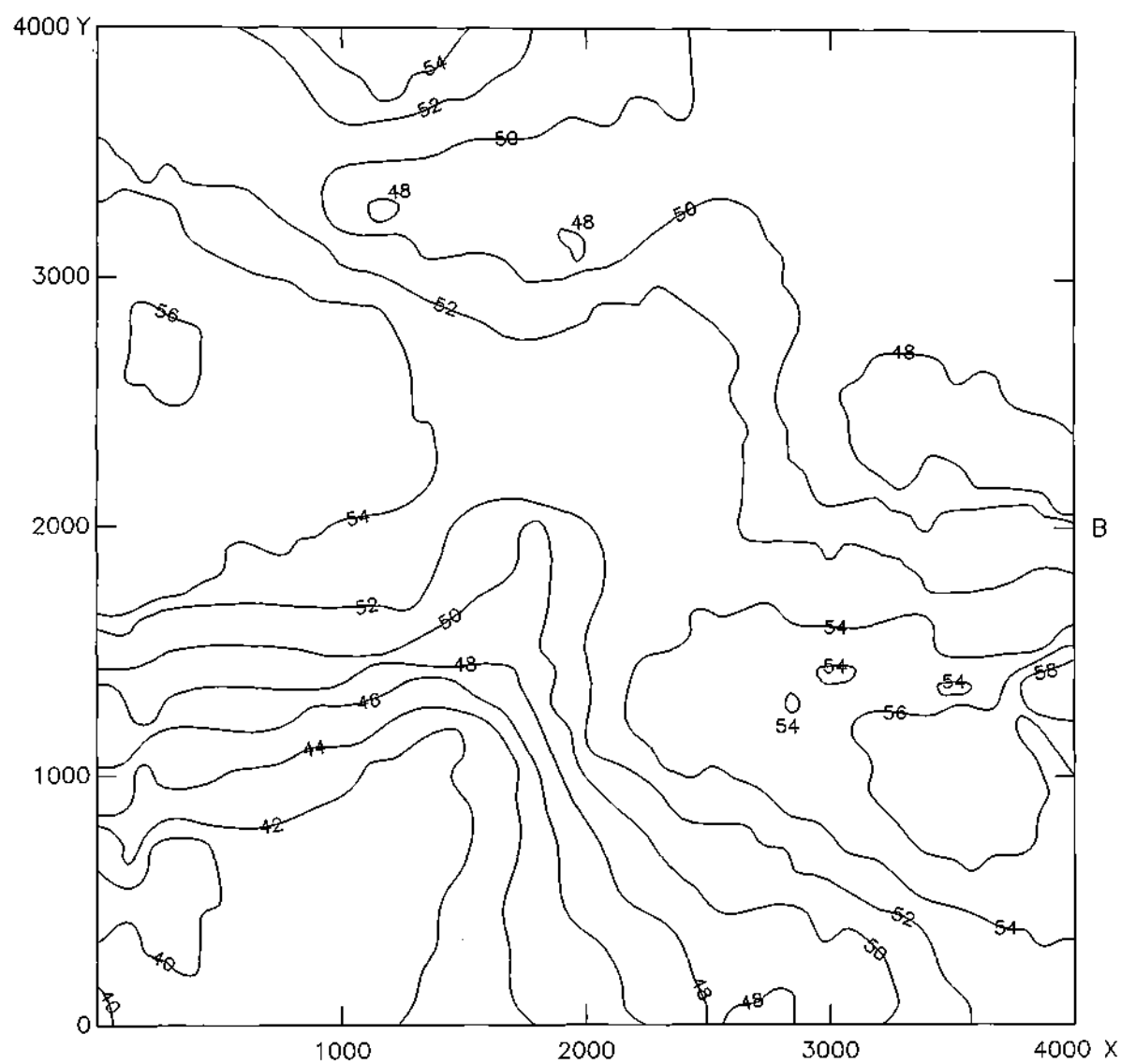


Fig. 5.23 Depósito de minério itabirítico, pesquisado segundo arranjo irregular de furos de sonda. Em A, traços de furos, com teores de Fe (%) para um dado nível. Em B e C curvas de isoteores de Fe (%), e de isovariância (% . %), respectivamente, obtidas por krigagem ordinária, a partir de valores estabelecidos para malha quadrada de 80 metros. (ver Tabela 5.1)



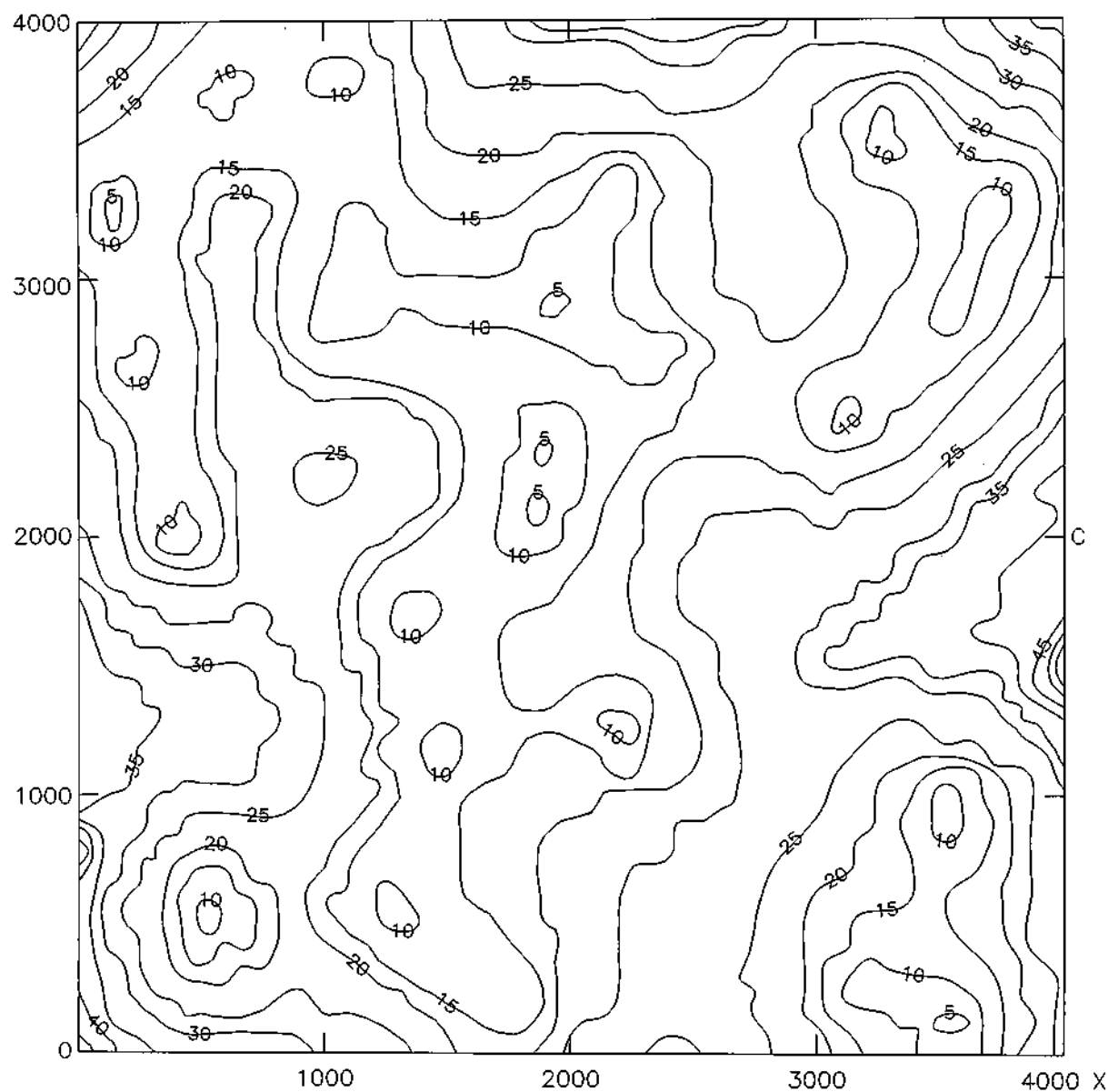


Fig. 5.23 C Continuação.

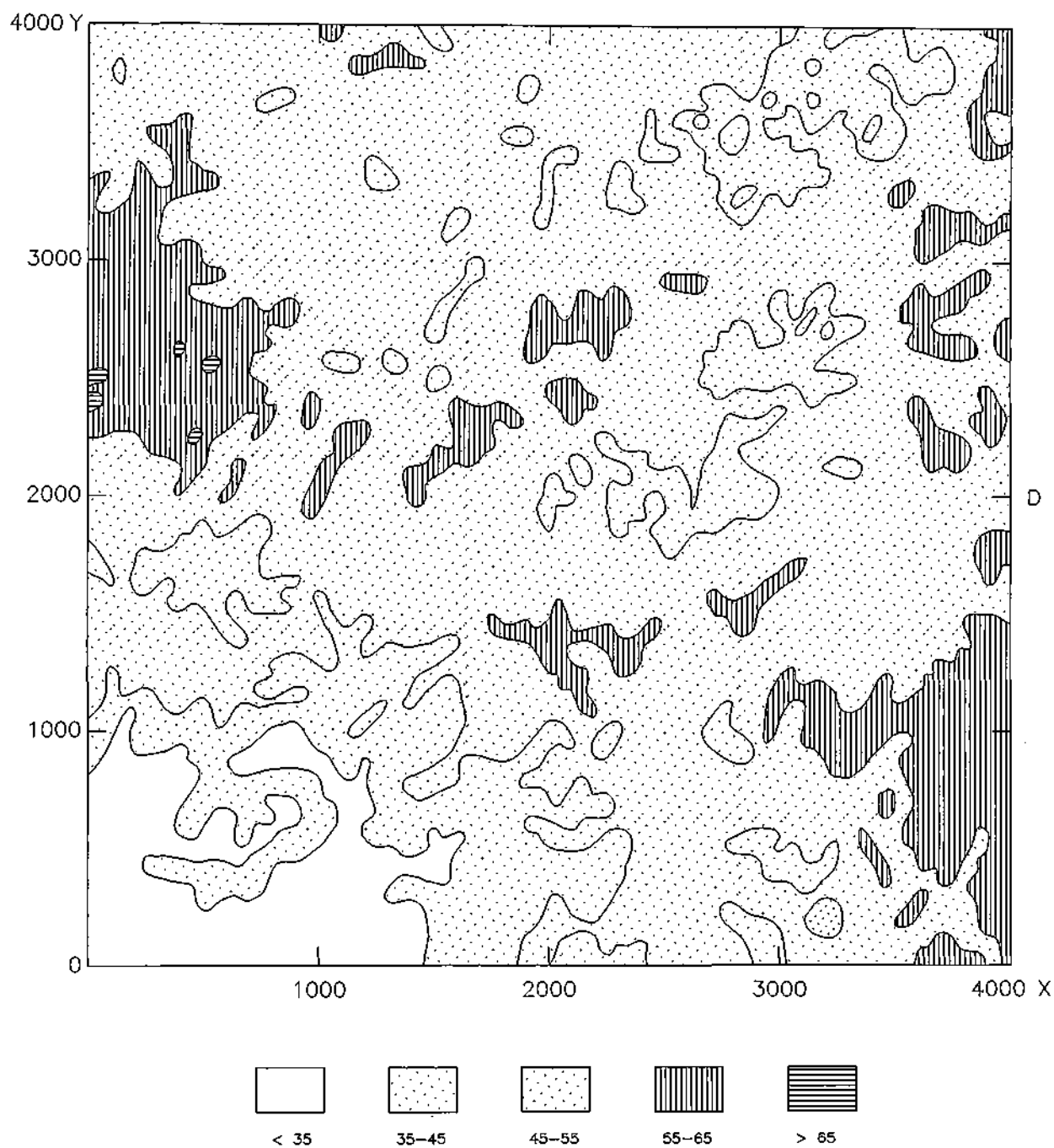


Fig. 5.23 D Continuação.

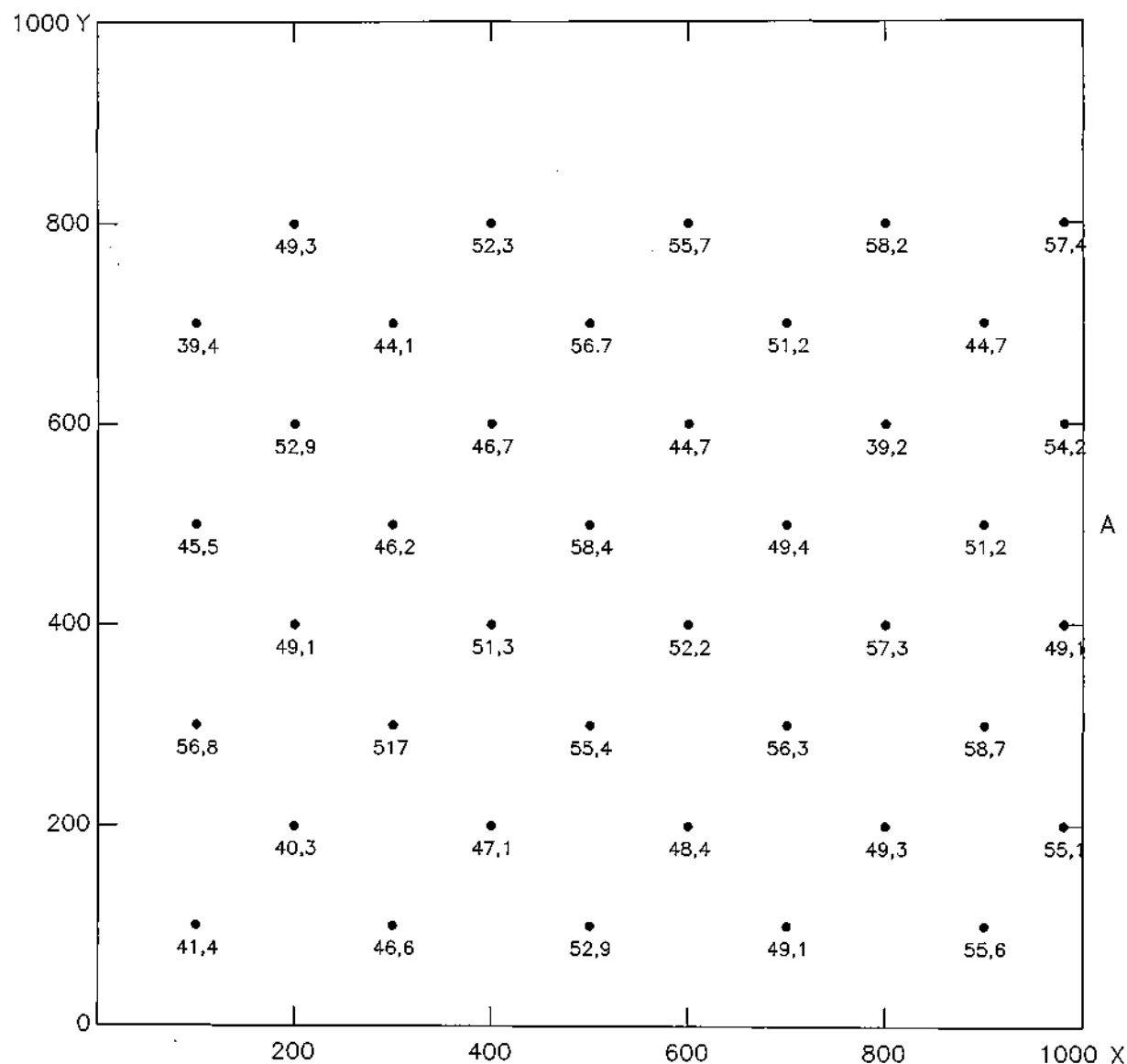


Fig. 5.24 Depósito de minério itabirítico, com material brando, explorado por malha regular. Em A, retículo quadrado de sondagens, com furo central; mostram-se teores de Fe (%) para um dado nível. Em B, curvas de isoteores de Fe (em %) obtidas por krigagem pontual, a partir de valores estabelecidos para malha quadrada de 20 metros. Em C, curvas de isovariância em (%).(%) Fe. Em D, curvas de isoteores de Fe (%) obtidas por simulação condicional. (ver Tabela 5.1)

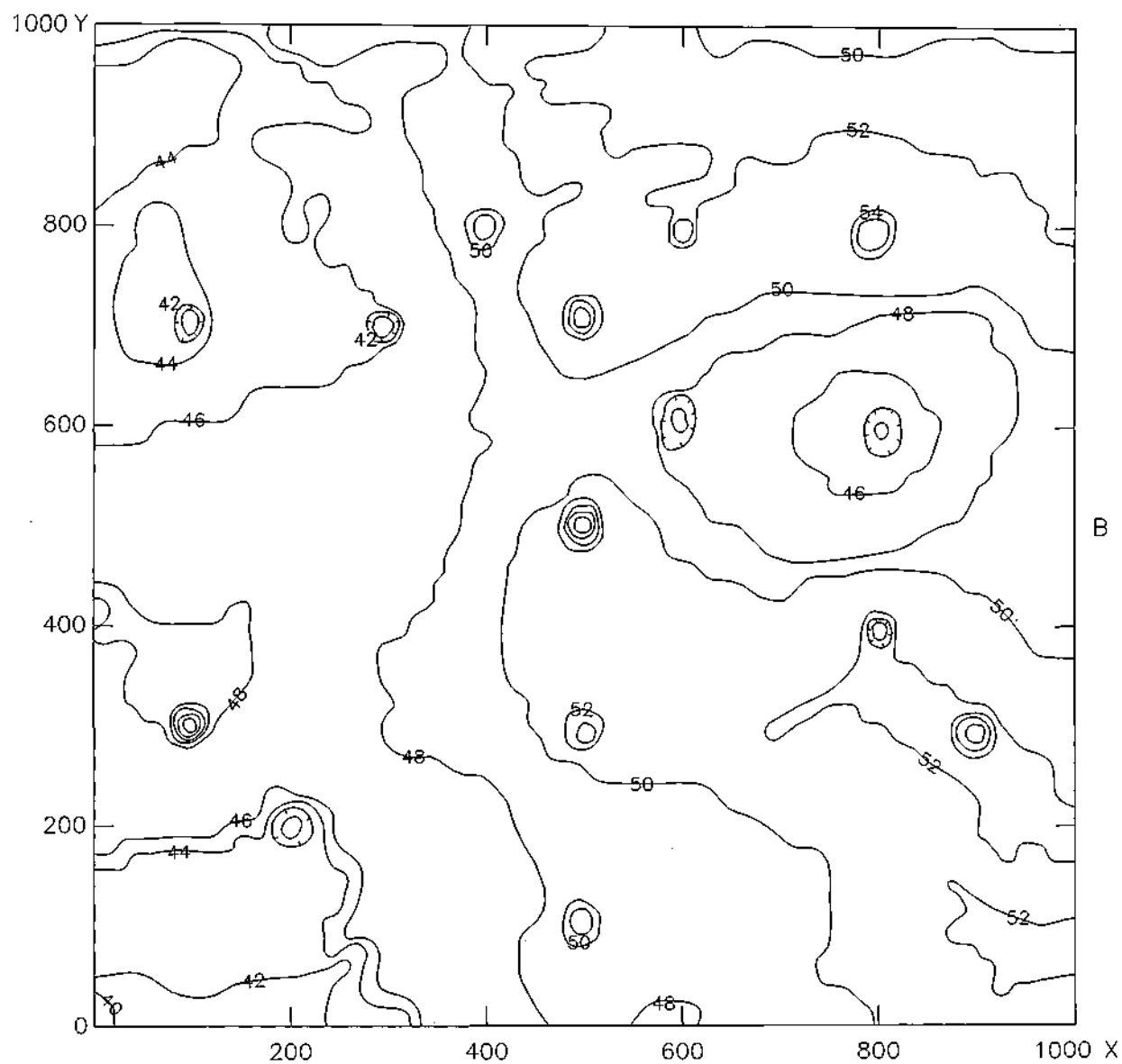


Fig. 5.24 B (Continuação). As pequenas curvas fechadas, diminuem de valor, do lado interno. Intervalo dos condutores = 38, 40, 42, ... 60% Fe.

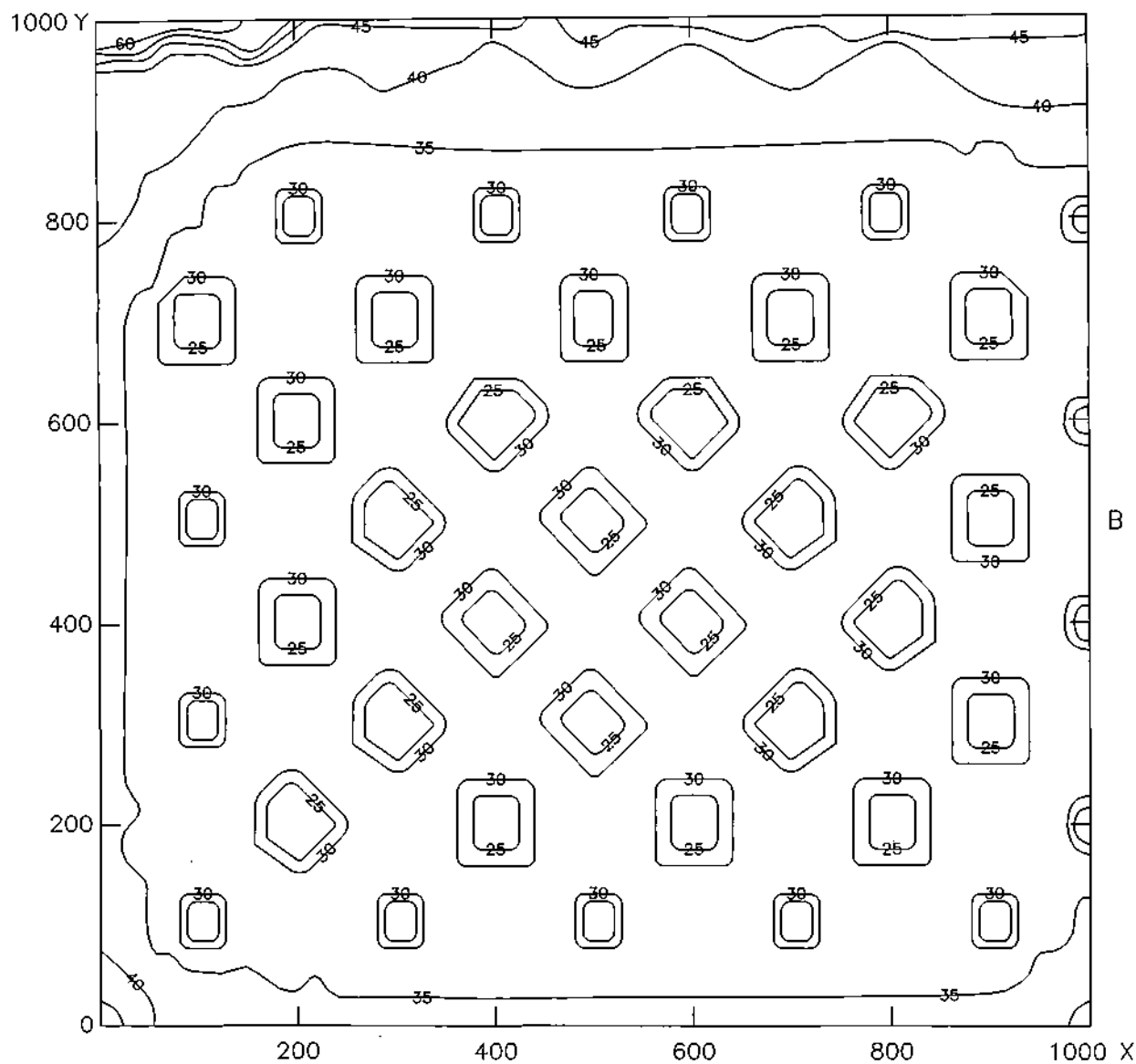


Fig. 5.24 C (Continuação). Intervalos dos contornos: 25, 30, 35, ... 60 (%) . (%) Fe.

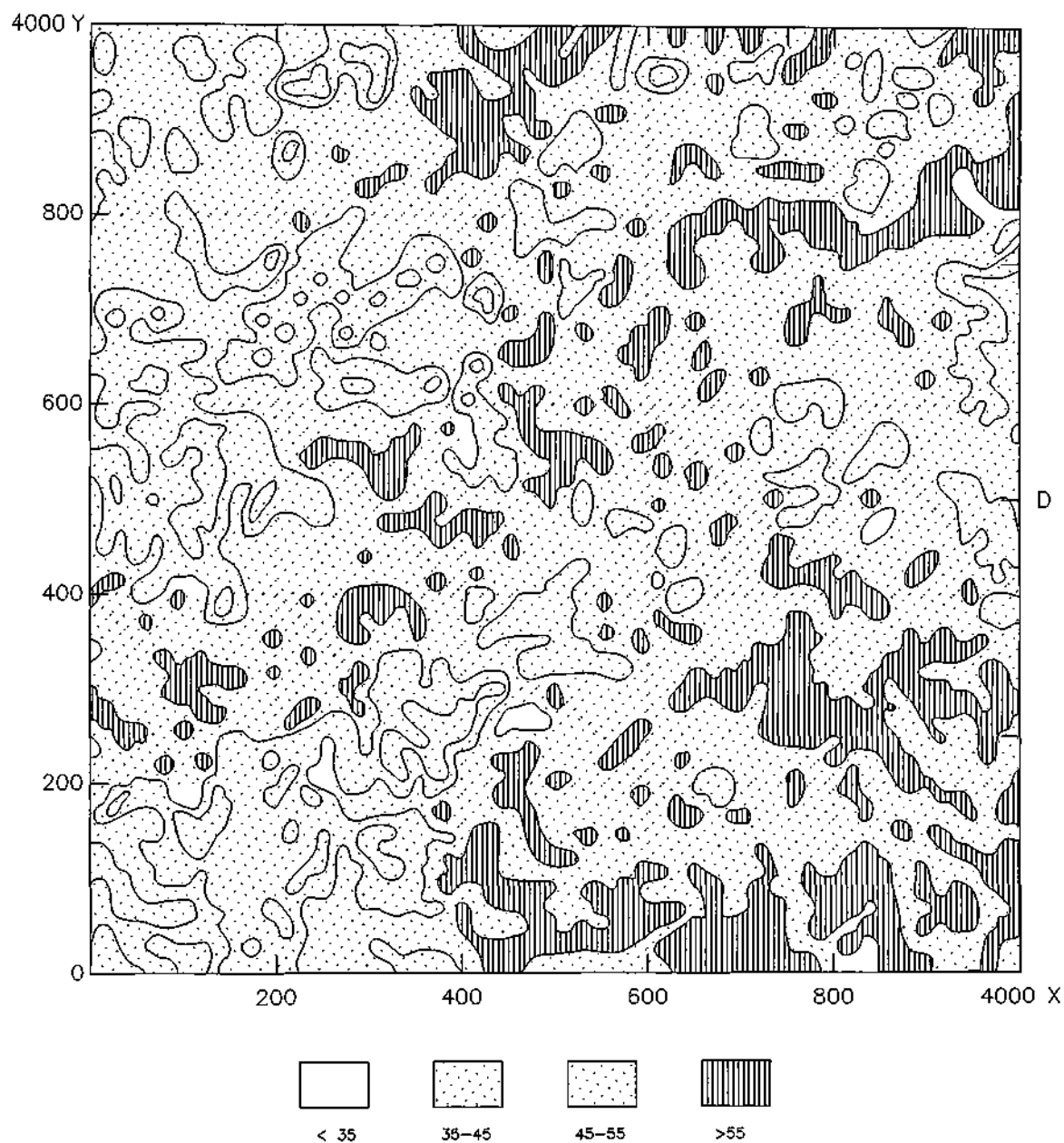


Fig. 5.24 D (Continuação). Isotores de Fe (%) obtidos por simulação condicional em malha quadrada de 80 metros.

Validação cruzada

Visando testar a qualidade que se tem nas estimativas obtidas pelos diversos métodos explicados até ao momento, usa-se a técnica da validação cruzada, segundo a qual o valor de cada ponto de observação (ou de controle) é removido, estimando-se seu valor a partir dos pontos vizinhos. Em seguida, comparam-se os valores originais com os estimados, através do coeficiente de correção ou através de uma reta de regressão adaptada aos mesmos. Se o valor do coeficiente de correlação estiver próximo de +1 ou se o declive da reta se aproximar de 45°, há validade nos resultados.

Aplicou-se validação cruzada para os três semi-variogramas experimentais (exemplos das Figuras 5.22, 5.23 e 5.24), que foram ajustados para modelos esféricos com apenas uma estrutura imbricada. Para esta validação foram montados dois operadores, tais que tanto melhor será a aderência do modelo, quando mais próximos forem da unidade. São os seguintes:

$$\text{Viés teor} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i^R}{\sum_{i=1}^n t_i^*} \quad \text{Viés variância} = \frac{\sum_{i=1}^n (t_i^R - t_i^*)^2}{\sum_{i=1}^n \sigma_{ik}^2}$$

onde:

t_i^R = teor real no ponto genérico i

t_i^* = teor estimado no ponto genérico i

σ_{ik}^2 = variância de krigagem no ponto genérico i

Em resumo, compara-se a capacidade que tem o modelo de reproduzir tanto o parâmetro quanto sua variabilidade (ver Figura 5.25).

Na verdade a validação cruzada não é capaz de validar um modelo (embora assim seja chamada), porém é capaz de nos dizer aprioristicamente se um modelo é ou não adequado a futuros trabalhos de estimação-caracterização de fenômenos autocorrelacionados (quando se ultrapassa o limite unidimensional). Uma solução para validação de

modelos bi-ou tridimensionais remete-nos novamente às técnicas de simulação. Já resumimos os procedimentos para o uso dessa técnica.

Os resultados obtidos para os três modelos pontuais referentes às Figuras 5.22, 5.23 e 5.24 são:

		Viés teor	Viés variância
	5.22	0,9764	0,2335
Figura	5.23	1,0049	1,3626
	5.24	1,0014	1,0397

Observa-se que os resultados para a Figura 5.24 são melhores que aqueles da Figura 5.23 e estes, melhores ainda que as da Figura 5.22. Isso se explica pelo maior número de dados em cada caso sucessivo, o que levou à obtenção de semi-variogramas experimentais mais bem estruturados, do exemplo da Figura 5.24 para a Figura 5.22 nota-se que no caso da Figura 5.23 a reprodução da variância (viés variância) apresentou resultado muito ruim, caracterizando a falta de robustez do modelo obtido.

Os cálculos de viés teor e do viés variância são suficientes para caracterizar (validar) um modelo. De qualquer modo tem-se na Figura 5.25 o registro de pontos e os valores do coeficiente de correlação r .

O leitor percebe, de imediato que o valor de r para a validação cruzada dos dados da Figura 5.22 é maior que o valor para os dados da Figura 5.23, que por sua vez é maior que para os dados da Figura 5.24, o que parece um contra senso, posto que os vieses de teor e variância mostraram que o melhor modelo foi justamente obtido para os dados da Figura 5.24, ou seja, o melhor modelo ajustado corresponde ao pior coeficiente de correlação (ou vice versa).

Na realidade não há contra senso, pois, a correlação entre os valores "reais" e estimados mede, na verdade, a variação explicada ou seja;

$$r^2 = \frac{\sigma^2 \text{ explicada}}{\sigma^2 \text{ total}} \quad (\text{definição generalizada})$$

$$r^2 = \frac{\sum (x^* - \bar{x})^2}{\sum (x_R - \bar{x})^2}$$

Como o modelo variográfico dos dados da Figura 5.22 apresenta efeito de pepita igual a zero, era de se esperar uma correlação muito superior da validação cruzada, usando-se este modelo em comparação aos demais, que apresentam efeitos de pepita relativos de 15,2% e 59,49%, respectivamente. O valor relativo do efeito de pepita (zero para os dados da Figura 5.22) é um bom indicativo da parte (proporção) não explicada da expressão acima, o que provoca necessariamente queda no valor do coeficiente de correlação.

Na Figura 5.26, representa-se uma das celas da Figura 5.24 (cela 100-300x e 100-300y). Na Figura 5.27 tem-se em A os dados krigados e, em B, os dados simulados. Os diagramas C e D representam os mesmos dados, respectivamente, sob forma de curvas de isovalores.

Ponderação e interpolação

Uma regra básica na obtenção de resultados confiáveis, que permitem processar a delimitação com uso de interpolação é a técnica da ponderação, cuja expressão matemática é:

$$VP = \frac{\sum_{i=1}^N (V_i \cdot F_i)}{\sum_{i=1}^N F_i}$$

onde VP é o valor ponderado, N o número de observações, V o valor da propriedade e F, o fator de ponderação.

Um exemplo esclarecerá a diferença entre uma média aritmética simples e uma média ponderada. Seja um canal

com as amostras e teores relacionados na Tabela 5.2.

Tabela 5.2. Dados de um canal de amostragem

Amostra	Extensão	Teor (%)	Extensão x Teor
A	0,20	6	1,20
B	0,11	12	1,32
C	0,30	3	0,90
D	0,50	0,5	0,25
E	0,30	4	1,20
F	0,06	5	0,3
G	0,12	0,5	0,06
H	0,02	2	0,04
	1,61		5,27

O teor médio ponderado é igual a $3,273 \cong 3,27\%$, enquanto o teor aritmético é igual a $4,125 \cong 4,12\%$, portanto uma diferença de 20,63%!

Examinemos agora um exemplo um pouco mais complexo. Seja um furo de sondagem rotativa a diamante, para o qual as amostras, comprimentos, recuperações e teores são apresentados na Tabela 5.3.

Tabela 5.3. Dados de um furo de sondagem vertical

Amostra	Extensão	Teor	Recuperação	Teor x Recuperação
A	1,00	5,25	80	420
B	1,00	1,72	75	129
C	1,00	9,25	50	462,5
D	1,00	3,11	95	295,45
E	1,00	1,10	90	99
F	1,00	12,49	60	749,40

Não há dúvida que se quisermos obter uma estimativa não tendenciosa para o teor do intervalo mineralizado, os teores individuais precisam ser reduzidos com base na recuperação, de modo que o teor ponderado é igual

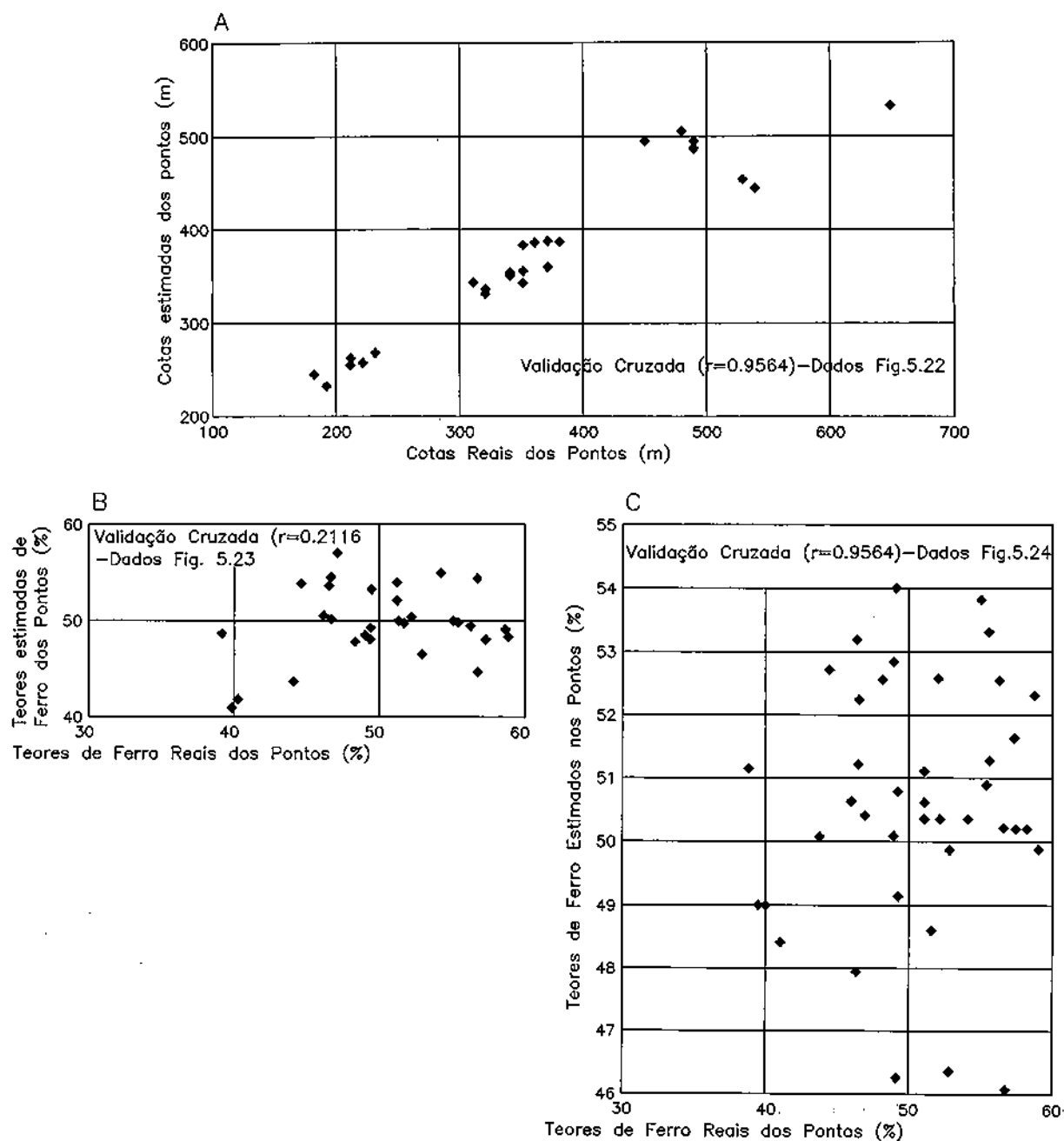


Fig. 5.25 Correlação de pontos “reais” e estradas para os dados das Figuras 5.22 (diagrama A), 5.23 (diagrama B) e 5.24 (diagrama C). Os coeficientes de correlação respectivos estão indicados.

a 4,78966 $\approx$ 4,79%, enquanto o teor aritmético é igual a 5,4866 $\approx$ 5,49% (diferença de 12,70%),

Consideremos, agora, um exemplo onde a ponderação é realizada em uma galeria, que atravessa um filão cujos teores são muito erráticos. Nesse exemplo, o corpo está exposto nas duas paredes (ou faces) da escavação; as espessuras medidas na vertical, entre capa e lapa são diferentes. A amostragem foi realizada segundo canais verticais, equidistantes (em ambas as paredes). As espessuras e teores respectivos, para cada canal são mostrados na Tabela 5.4.

Cálculos

$$A_1A_2 = \frac{12,40 \cdot 2,15 + 15,2 \cdot 1,04}{2,15 + 1,04} = 13,31\%$$

$$B_1B_2 = \frac{8,90 \cdot 0,82 + 13,6 \cdot 1,57}{0,82 + 1,57} = 11,99\%$$

$$C_1C_2 = \frac{2,30 \cdot 1,70 + 7,70 \cdot 2,08}{1,70 + 2,08} = 5,27\%$$

$$13,31 \cdot 1,595 + 11,99 \cdot 1,195 + 5,27 \cdot 1,890 = 9,726 \approx 9,73\%$$

A média aritmética simples para o canal do lado direito é 7,866 e para o lado esquerdo 12,166 e a média geral é 10,016 $\approx$ 10,02%, para uma espessura de 1,56m.

Um teor imparcial ou não enviesado (*unbiased*) para o corpo é obtido através da ponderação do teor pela espessura, com os resultados ponderados novamente pelas espessuras médias.

Ponderação por área de influência é uma prática

comum, quando a face é amostrada por canais verticais posicionados em intervalos irregulares; os canais são de comprimentos diferentes e as amostras têm comprimento e teor diferentes. O teor ponderado é igual a:

$$T_{pond} = \frac{\sum (\text{comprimento} \cdot \text{int ervalo} \cdot \text{teor})}{(\text{comprimento} \cdot \text{int ervalo})}$$

A relação entre as estimativas ponderadas e aritméticas foi examinada por V.A. Petrov (1965, *apud* Kazhdan, 1988, p. 268), que deduziu uma expressão relacionando as mesmas:

$$T_{pond} = \bar{t} (1 \pm R_{et} \cdot CV_e \cdot CV_t)$$

Nesta expressão, o coeficiente de correlação R_{et} entre as espessuras (e) e teores (t) é expressado por:

$$R_{et} = \frac{\sum_{i=1}^N (e_i - \bar{e})^2 \cdot (t_i - \bar{t})^2}{\left(\frac{\sum_{i=1}^N (e_i - \bar{e})^2}{N-1} \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^N (t_i - \bar{t})^2}{N-1} \right) \right)^{1/2}}$$

CV_e e CV_t são os coeficientes de variabilidade, para espessura e teor, respectivamente.

A fórmula de Petrov mostra a dependência entre o valor ponderado e os coeficientes de variabilidade do teor e da espessura, bem como da correlação entre teor e espessura; adicionalmente, verifica-se que produz valor de

Tabela 5.4. Dados de amostragem de canal nas paredes de uma galeria

Canal Parede Direita			Canal Parede Esquerda			Semi-soma das Espessuras
Amostra	Teor	Espessura	Amostra	Teor	Espessura	
A ₁	12,40	2,15	A ₂	15,20	1,04	1,595
B ₁	8,90	0,82	B ₂	13,60	1,57	1,195
C ₁	2,30	1,70	C ₂	7,70	2,08	1,890

média ponderada igual ao da média aritmética, quando a espessura e o teor não se correlacionam e pouco variam. Na realidade, a média aritmética só é imparcial quando não há correlação entre teor e espessura. Se há correlação, só a média ponderada é imparcial.

Calculados os valores ponderados para a área do mapa ou das seções, podemos proceder à interpolação, usando os métodos já estabelecidos.

Extrapolação

A delineação de certas porções de um depósito mineral pode ser realizada através de extrapolação, do seguinte modo:

1) Transferência para as seções de exploração (verticais e horizontais) dos pontos chave das obras de pesquisa.

2) Conexão dos serviços marginais positivos, através do traço da superfície envoltória de todos esses serviços, para cada seção. Esse traço, nas seções denomina-se **limite interno**; e

3) Com base na extrapolação constrói-se o **limite externo**, que corresponde à "espessura" zero, ou "teor" zero ou outra propriedade de valor zero. Os procedimentos para a construção do limite externo são expostos a seguir.

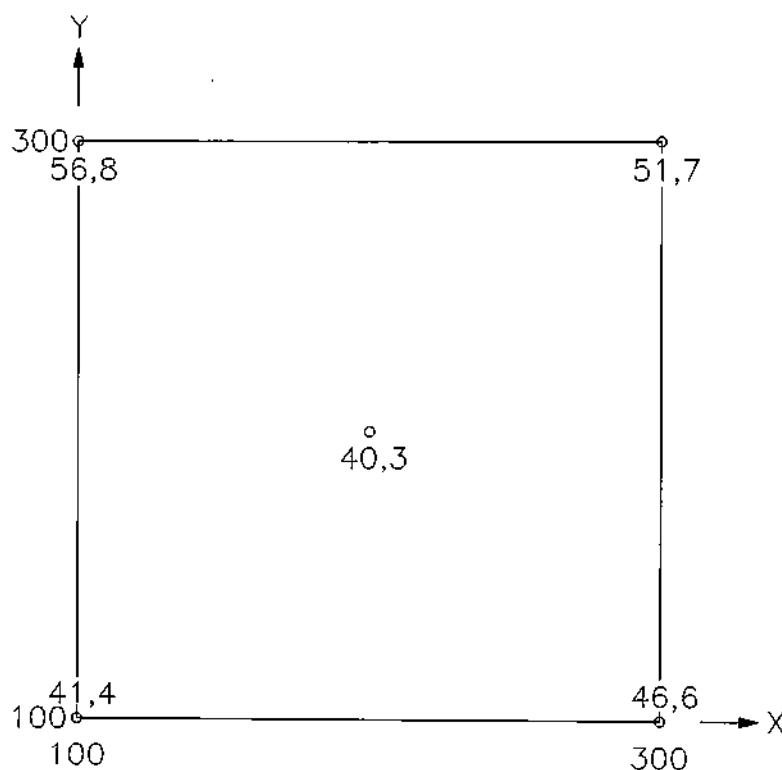
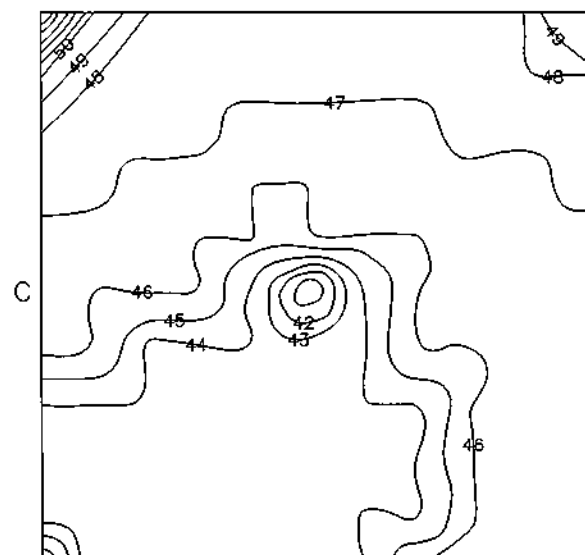


Fig. 5.26 Representa-se uma das celas da Figura 4.23, com os valores originais em malha quadrada de 200 metros de lado, com furo central.

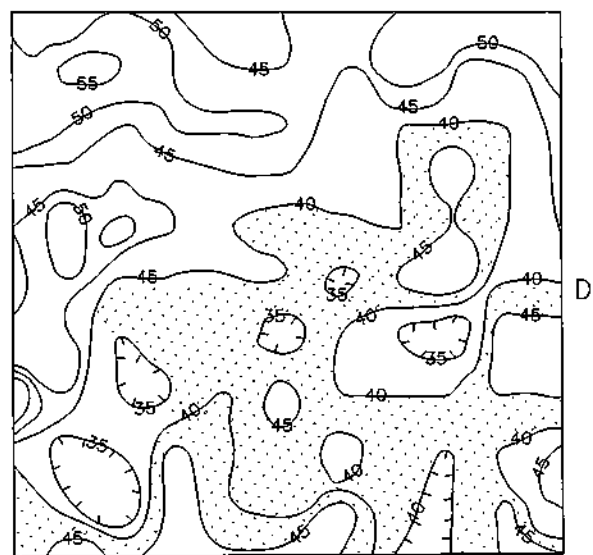
	58	52	50	50	50	50	50	50	50	50	52	60	50	50	45	45	45	50	50	50	50	50
	52	50	50	50	50	50	50	58	58	50	50	50	55	55	50	45	45	45	55	45	45	55
	50	50	48	48	46	46	46	46	48	48	48	55	50	45	50	50	50	55	40	40	40	45
	48	48	46	46	46	46	46	46	46	46	48	40	45	45	40	45	45	35	40	50	40	45
	46	46	46	46	46	46	46	46	46	46	46	45	55	35	45	40	35	45	40	45	40	45
	46	46	46	46	44	40	44	46	46	46	46	40	50	40	40	40	40	30	45	50	40	40
A	46	46	44	44	44	44	44	46	46	46	46	50	45	35	40	40	30	40	35	30	50	50
	44	46	46	46	46	46	46	46	46	46	46	30	45	35	35	40	50	40	40	40	45	45
	46	44	44	44	44	44	44	44	46	46	46	40	30	35	45	40	40	35	40	35	40	35
	44	44	44	44	44	44	44	44	46	46	46	45	35	30	45	40	40	45	40	35	45	35
	40	44	44	44	44	44	44	46	46	46	46	40	50	40	50	45	45	45	35	35	45	45

Valores obtidos por krigagem ordinária pontual
(malha quadrada de 20 metros).

Valores obtidos por simulação condicional
(malha quadrada de 20 metros).



Isolinhas para os valores krigados



Isolinhas para os valores simulados

Fig. 5.27 Representação dos valores reais (krigados) e simulados para uma das celas do exemplo da Figura 5.23 (cela mostrada na figura 26).

Extrapolação limitada

a) O limite externo é construído através da extrapolação linear (gráfica ou analítica), adotando-se como parâmetro o teor de corte (Figura 5.28).

b) O limite externo é uma linha que passa pelo ponto médio entre os serviços positivos e negativos (Figura 5.29).

c) O limite externo é marcado a partir de pontos chave obtidos nas seções de exploração, com base em argumentação geológica. Na Figura 5.30 é dado um exemplo no qual o limite externo, à direita e esquerda na seção é terminado de modo lenticular, pois o corpo tem tal tipo de comportamento.

d) Os pontos chave para a construção do limite externo são obtidos a partir da regra da cunha. Calcula-se um ângulo médio de acunhamento, que é igual à razão entre a metade da espessura dos serviços marginais positivos e a metade do espaçamento entre os serviços positivos e negativos, conforme mostrado na Figura 5.31. Assim, tem-se:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{m_i / 2}{I_i / 2} = \frac{m_i}{I_i}$$

$$\bar{m} = \sum_{j=1}^N m_j / N$$

$$\bar{I} = \sum_{j=1}^N I_j / N$$

Para cada distância d de acunhamento tem-se:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{m_d / 2}{d} \quad d = \frac{m_d}{2 \operatorname{tg} \alpha / 2}$$

Na Figura 5.31 se os valores de $\bar{m}$ e $\bar{I}$ são iguais a 16 e 100, respectivamente; obtemos $\operatorname{tg} \alpha / 2 = 0,16$. Assim, para os pontos chave representados, tem-se:

Ponto Chave	Distância (m)
A	$12/0,32 = 37,5$
B	$9/0,32 = 28,1$
C	$20/0,32 = 62,5$
D	$16/0,32 = 50$
E	$25/0,32 = 78,1$

Extrapolação ilimitada

a) O limite externo pode ser construído com base em algum parâmetro geológico, tal como estrutura, litologia, etc. Nas Figuras 5.32, 5.33 e 5.34 são mostrados exemplos de delineação com tal suporte.

b) O limite externo é construído paralelamente ao limite interno, considerando-se a meia distância entre os serviços de exploração, conforme Figura 5.35.

c) Em uma seção de exploração, o limite externo pode ser construído abaixo do nível inferior que se conhece o corpo, projetando-se o mesmo ao longo do mergulho e posicionando o limite inferior em um ponto correspondente à metade da altura do corpo representado na seção, conforme Figura 5.36.

d) O limite é extrapolado em relação às dimensões do corpo, cujo contorno externo forma um triângulo de altura igual a metade ou a um quarto do comprimento do corpo atravessado pelo serviço de pesquisa ou, então, forma um retângulo de lado menor igual a um quarto do comprimento do corpo atravessado pelo serviço conforme Figura 5.37.

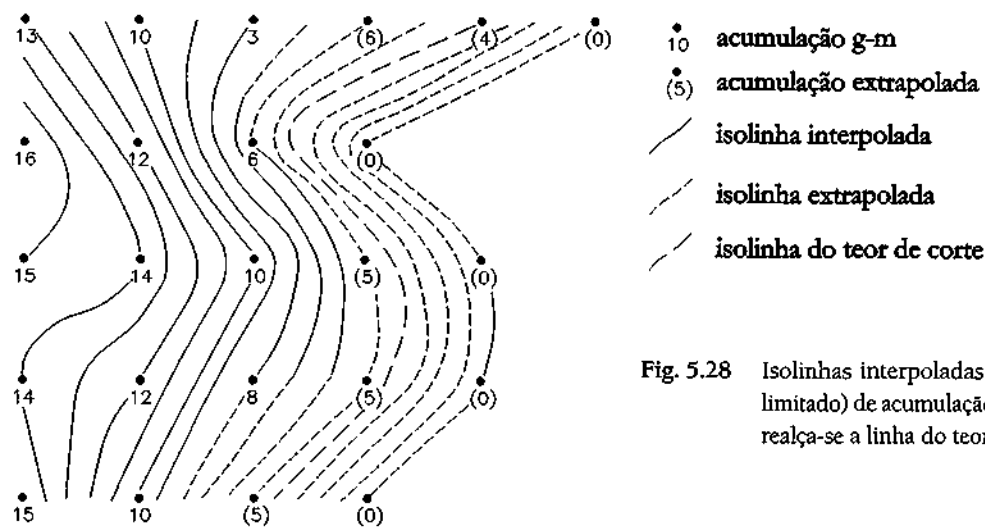


Fig. 5.28 Isolinhas interpoladas e extrapoladas (de modo limitado) de acumulação teor (ppm)-espessura (m); realça-se a linha do teor de corte de 4 g-m.

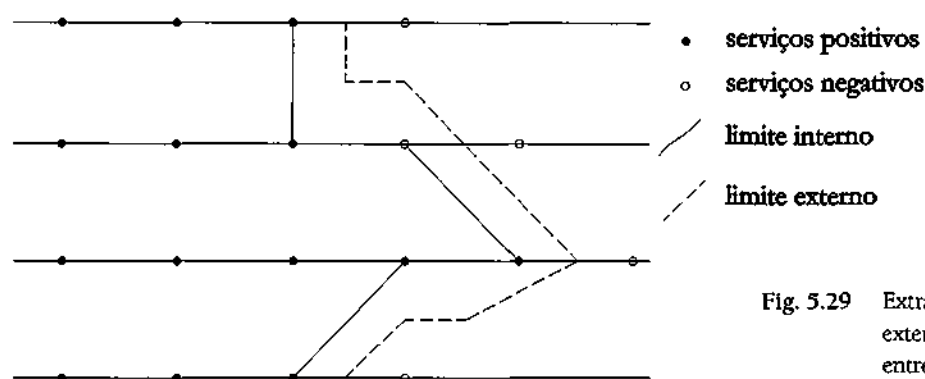


Fig. 5.29 Extrapolação limitada com contorno externo passando pelo ponto médio entre serviços positivos e negativos.

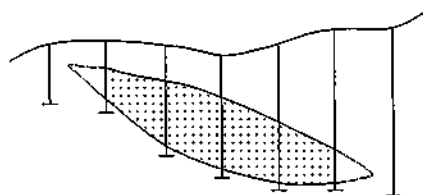


Fig. 5.30 Construção do contorno terminal de um corpo lenticular, por extrapolação limitada.

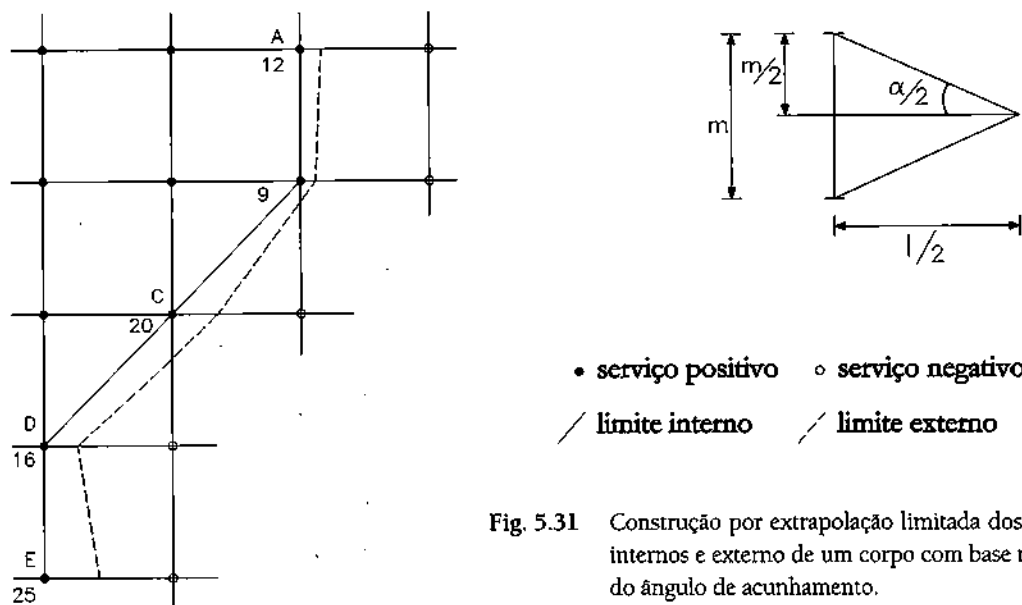


Fig. 5.31 Construção por extrapolação limitada dos limites internos e externo de um corpo com base na regra do ângulo de acunhamento.

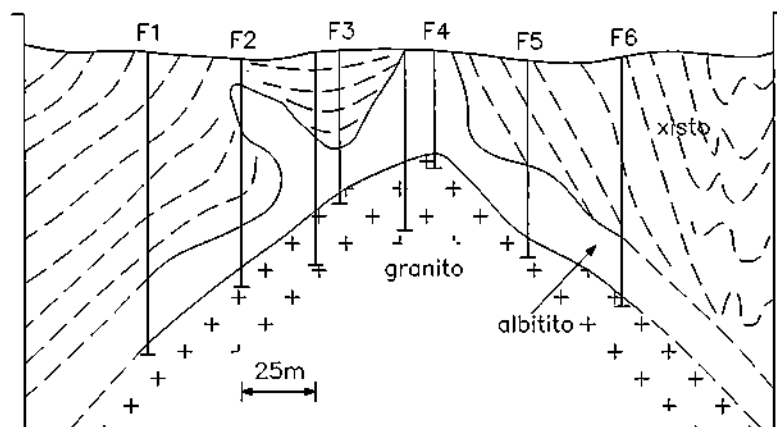


Fig. 5.32 Extrapolação ilimitada utilizando inclinação da superfície do corpo de albitito e sua espessura, para esboçar continuidade.

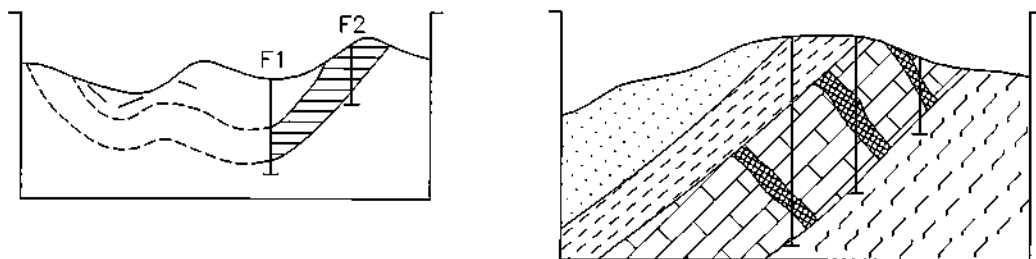


Fig. 5.33 Parâmetros geológicos utilizados na extrapolação elimitada. Em A, usou-se a estrutura dobrada, em B, um horizonte "favorável".

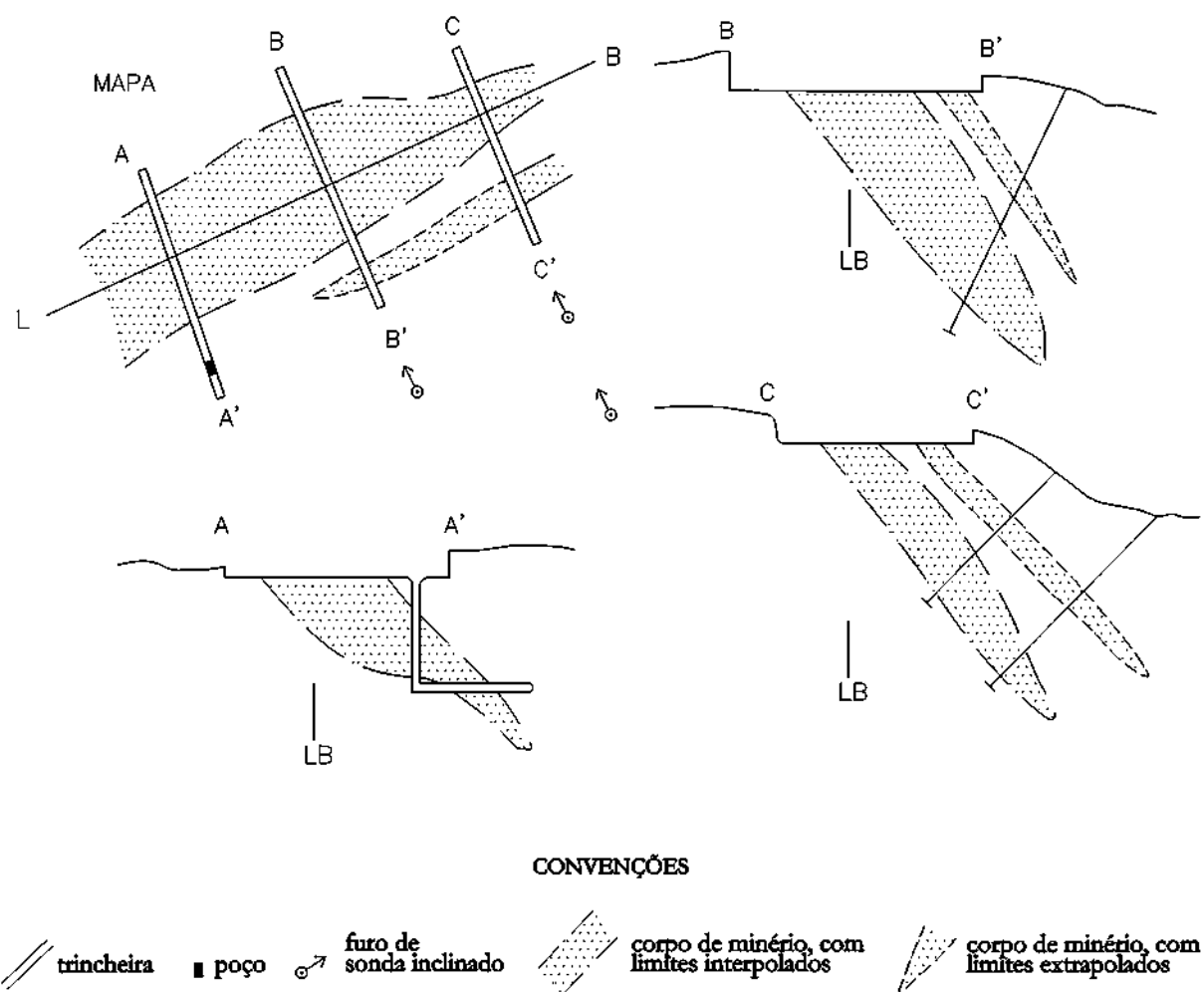


Fig. 5.34 Extrapolação ilimitada, com base na morfologia de um corpo mineral lenticularizado.

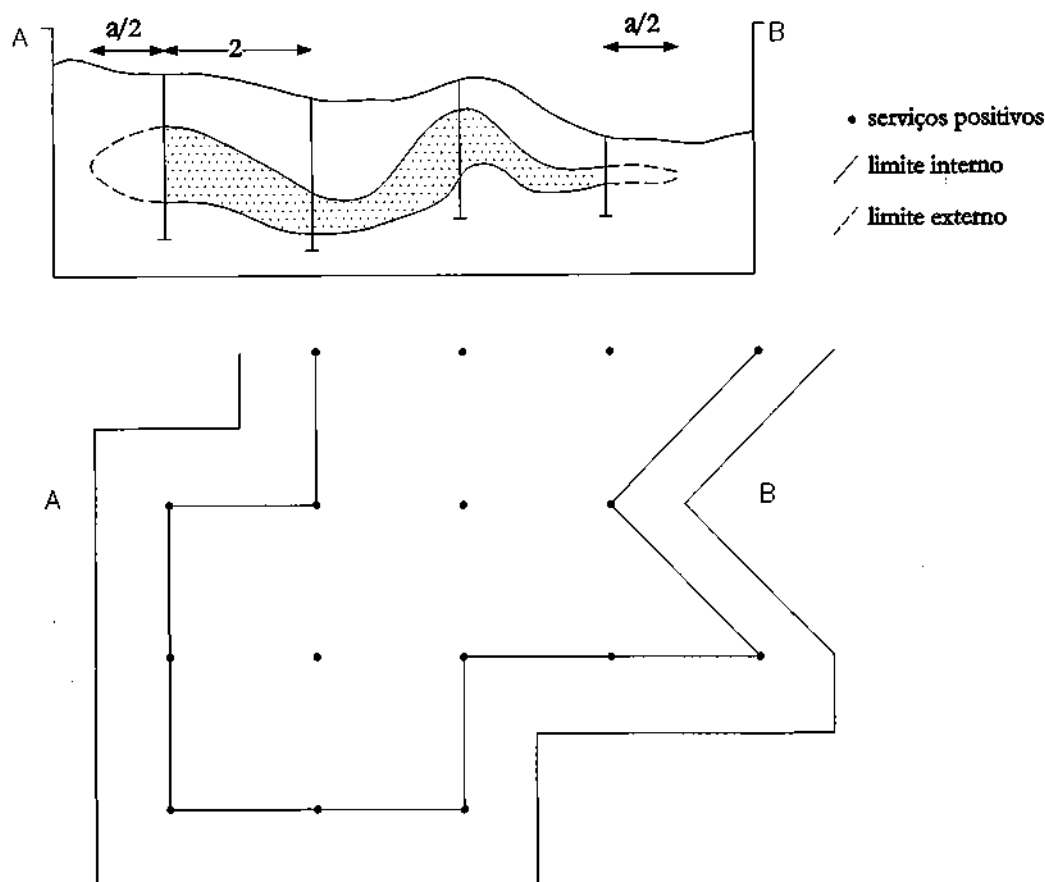


Fig. 5.35 Extrapolação ilimitada usando-se a metade da distância entre serviços positivos para a construção do contorno externo

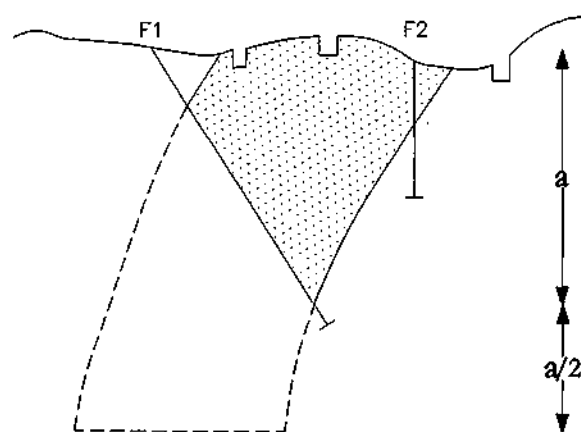


Fig. 5.36 Construção do contorno por extrapolação ilimitada a partir da projeção do corpo mineral ao longo do mergulho. O limite inferior é igual à metade da maior dimensão vertical do corpo ($a/2$).

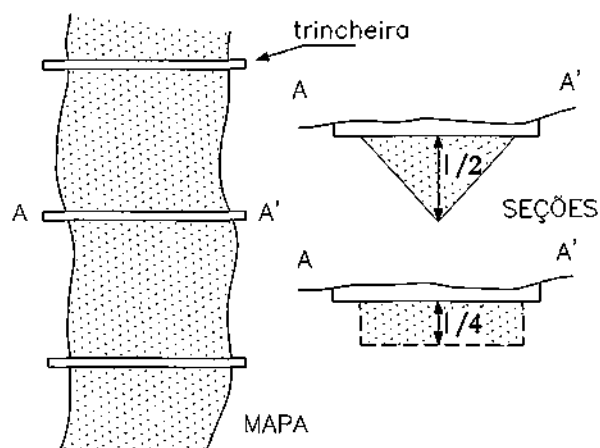


Fig. 5.37 Extrapolação em relação às dimensões do corpo mineral. Usou-se a largura para a construção de triângulo ou um retângulo de delineação.

6. Verificação da otimalidade do retículo exploratório

Elementos de otimização

Otimizar a exploração mineral significa a menor perda de tempo e de dinheiro que garante o cumprimento do objetivo do trabalho. Para tal é necessário dispor de meios técnicos adequados, de utilizar o sistema de pesquisa mais apropriado, e de determinar a quantidade crítica de impactos com furos (por exemplo) arranjados segundo um dado retículo.

Os meios técnicos envolvem fatores geológicos, tecnológicos e econômicos. Os fatores geológicos incluem a relação entre teor e espessura, a trama de foliação-acamamento, a morfologia das acumulações, a estrutura e a composição das acumulações. Considerando-se os fatores geológicos decide-se como proceder; por exemplo, um corpo mineral com estrutural vertical deve ser investigado através de furos inclinados. A seleção dos métodos de investigação considera o objetivo do projeto, o tipo de minério, os condicionamentos geológicos. O meio técnico mais difundido na pesquisa é a sondagem, que combinado com escavações garante a obtenção das informações necessárias para avaliar seguramente o depósito mineral.

As escavações são de grande utilidade, pois, quando a constituição do depósito é complexa e as estruturas controladoras não são prontamente cartografadas, tais questões podem ser resolvidas. Tornam-se muito úteis quando a mineralização é de pequeno porte; por outro lado facilitam a coleta de amostras de grande porte.

Para vários depósitos minerais o contraste de proprie-

dades entre o corpo de minério e as encaixantes pode permitir a aplicação da geofísica, na definição dos contatos, diminuindo a necessidade das sondagens e das escavações.

A seleção do tipo de arranjo exploratório que se vai adotar, conforme mostrado em outra parte do trabalho, é condicionada, maiormente em função da morfologia do corpo mineral. Além disso há que considerar as propriedades naturais da mineralização e sua variabilidade.

Ao planejar o projeto de exploração por meio de escavações, tem-se variantes de disposição das mesmas, em função de diferentes horizontes (níveis) de trabalho. Se o trabalho envolver sondagem há variantes como o tipo de furos a realizar, a testemunhagem, a inclinação dos furos, etc.

O custo dos trabalhos é a base para a seleção dos meios a usar na exploração, desde que os resultados obtidos satisfaçam os objetivos estabelecidos. Pode-se estabelecer uma fórmula envolvendo o custo dos serviços, o tempo para realizá-los e o dispêndio financeiro:

$$\text{Custo} + \text{Tempo} \times \text{Gastos} \rightarrow \text{Mínimo Valor}$$

A seleção da variante de utilização dos meios técnicos é aquela que envolve um mínimo de gastos.

Um exemplo simplificado de tomada de decisão em relação à sondagem, se realizada na superfície ou se subterrânea é apresentado a seguir.

A comparação é feita pela equação

$$\left[\left(\frac{Ges}{\ell} + C_1 \right) \left(\frac{Gas}{L} + C_2 \right) \ell > \left(\frac{Gas}{L} + C_3 \right) (L - \ell) \right]$$

Onde	Ges é o gasto com escavação da câmara onde se instalará a sonda
	Gas é o gasto com construção de via de acesso para a câmara
	ℓ é a extensão do furo subterrâneo
	L é a extensão do furo na superfície
	C_1 é o preço do metro perfurado, subterrâneo
	C_2 é o preço do metro perfurado, na superfície
	C_3 é o preço do metro perfurado entre a superfície e o nível subterrâneo

Dentre os meios técnicos mencionamos as propriedades tecnológicas. Assim, amostras são coletadas para estudos de concentração, determinando-se o melhor método, para determinar os tipos tecnológicos e sua distribuição, para estudos metalúrgicos e para estabelecer as condições econômicas de produção a comercialização.

O tipo de mineralização, em termos das suas propriedades tecnológicas, depende da composição mineralógica e química da mesma, da granulometria, das impurezas e sua distribuição, etc.

As amostras tecnológicas são de laboratório (dezenas e centenas de quilos), **semi-industriais** (toneladas) e **industriais** (dezenas e centenas, de toneladas).

Dentre os fatores tecnológicos citam-se as condições de lavra, a hidrogeologia, a estabilidade de taludes, etc. Com base no estudo de exploração pode-se, preliminarmente, estabelecer o método de decapeamento, o sistema de lavra, a diluição, as condições hidrogeológicas e de estabilidade (geotecnia), os controles ambientais, etc.

O retículo ou malha de sondagem e sua execução objetivam:

a) Determinar a continuidade estrutural do depósito

e as regularidades na distribuição de teores e de granulometria.

b) Determinar a continuidade estrutural e a irregularidade na distribuição dos teores e granulometria.

c) Determinar a descontinuidade estrutural e as regularidades de distribuição de teor e granulometria; e

d) Determinar as descontinuidades estruturais e as irregularidades na distribuição dos teores e granulometria.

Um dos problemas críticos que ocorre na delineação dos depósitos minerais relaciona-se com as possíveis **variantes de interpretação**. O tema está ligado à determinação da rede ótima de exploração; um retículo rarefeito de serviços conduz à interpretações errôneas, especialmente se o corpo mineral tem estrutura descontínua.

Outro problema de difícil abordagem se relaciona com a determinação do grau de heterogeneidade na distribuição dos componentes úteis.

Tanto a questão de descontinuidade como a da heterogeneidade podem ser abordadas de modo mais objetivo quando se dispõe de amplo conhecimento sobre a morfologia do depósito, das dimensões das parcelas mais ricas e mais pobres, etc.

Se o parâmetro sob exame exibe variabilidade, sua avaliação pode ser feita em função das dimensões do retículo exploratório, de modo a se ter espaçamento aceitável.

O exemplo mostrado na Figura 6.1 esclarecerá esta última questão. Se calculamos a média e o coeficiente de variação para amostragem com intervalos crescentes, obtemos (e = espaçamento):

Intervalo	Nº de Amostras	$\bar{x}$	CV
e	10	5,5	55,0
2e	5	5,0	63,2
3e	4	5,5	70,4
4e	3	5,0	80,0

Observa-se que os valores médios pouco variam (por-

que os dados variam de maneira sistemática e com gradiente regional), ao contrário do coeficiente de variação, que no caso, cresce com a diminuição do número de amostras (ou com a ampliação do espaçamento). É claro que o melhor espaçamento a adotar é o que contempla 10 amostras. Deve ser comentado que não se considera, nesse caso, o modo de arranjo das amostras; o grau de variabilidade sempre é o mesmo, porém o caráter do arranjo é diferente. Para 10 amostras existem 10 modos de arranjar os dados (3.638.800 arranjos diferentes).

A variabilidade dos corpos geológicos (depósitos minerais na presente apresentação) é função direta do interrelacionamento das propriedades e é tanto menor quanto maior for a correlação entre as mesmas. Por outro lado, a variabilidade é diferente para diferentes tamanhos ou domínios do corpo mineral. Para todo o corpo tem certo valor, para a reserva lavrável, outro, para um bloco de lavra, outro ainda, o mesmo acontecendo para uma frente de lavra.

Dependendo da fase em que se encontra a investigação do depósito, têm-se diferentes graus de adensamento da malha. Além disso, deve ser comentado que, em função da anisotropia de um dado parâmetro sob exame, a malha

pode ser quadrada ou retangular ou mesmo, triangular.

A integração dos dados da exploração mineral e a interpretação das características geológicas do depósito permitem avaliar a eficiência do retículo exploratório, no sentido de aprimoramento do arranjo dos serviços, amarrando esse aprimoramento com as particularidades geológicas do depósito.

O aprimoramento (otimização) do retículo exploratório é realizado a partir da comparação das diversas seções (verticais e horizontais) geológicas, nas quais os serviços de pesquisa estão representados. Pode ser afirmado que quando a informação geológica constante das seções é lógica e coerente, o retículo está otimizado. É claro que o adensamento seletivo das interseções de pesquisa contribuirá para refinar o conhecimento sobre o depósito, mas dificilmente modificará a interpretação adotada. Um exemplo é fornecido na Figura 6.5, oportunidade em que se comprova que o retículo encontra-se otimizado, pois o adensamento não contribui para modificar de modo significativo os limites do depósito.

A não confirmação da otimalidade do retículo exploratório é exemplificada na Figura 6.6. O adensamento não permite confirmar a interpretação apresentada a partir

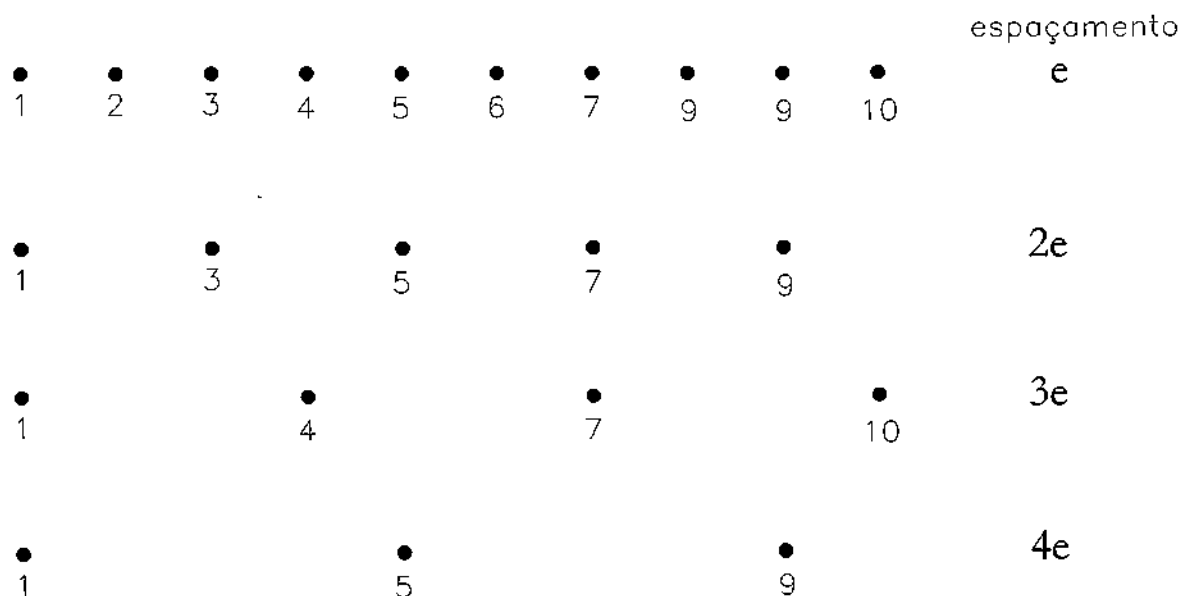


Fig. 6.1 Linha de amostragem, com espaçamentos crescentes de coleta de amostras.

de um retículo pouco denso. De imediato se verifica que a morfologia do corpo mineral sob investigação é muito mais complexa que o esperado e só o adensamento possibilita comprovar que o retículo otimizado é o retículo adensado.

As observações feitas até o momento permitem que se adotem os seguintes métodos de verificação da otimalidade do retículo exploratório: a) por analogia; b) por comparação de dados de pesquisa e de lavra; c) por adensamento (ou rarefação) do retículo; d) por métodos estatísticos e e) por métodos geoestatísticos.

Analogia

Há disponibilidade de informações relativas aos retículos exploratórios adotados para investigar **todos** os tipos conhecidos de depósitos minerais. O retículo depende da categoria de reservas que se pretende acessar; ao mesmo tempo, depende da morfologia, estrutura, tamanho e variabilidade de atributos fundamentais, como teor e espessura.

Em princípio podemos considerar para a adoção de um retículo as seguintes situações em relação à morfologia, estrutura e espessura do corpo, além da distribuição do componente ou componentes úteis:

Os espaçamentos propostos por V. M. Kreiter (1960,

apud Kuzvart & Böhmer, 1986), com base em analogia são mostrados na Tabela 6.1. Em função das características dos depósitos, aquele autor aponta o tipo de serviço exploratório e as categorias de reservas, a partir de espaçamentos diferentes do retículo.

Um esquema mais elaborado para a definição dos espaçamentos utilizados nos retículos exploratórios, em função do tipo de depósito (classificação conforme estrutura, espessura e distribuição do mineral útil) foi preparado pela Comissão Estatal para os Recursos Minerais da União Soviética (Kazhdan 1974, citado por Kuzvart & Böhmer, 1986), conforme vem mostrado na Tabela 6.2.

Métodos estatísticos

Os dados da pesquisa mineral podem ser avaliados utilizando os métodos da matemática estatística, que permitem determinar o nível da variabilidade do parâmetro sob exame (sem que se considere a disposição espacial dos pontos de controle ou de amostragem). A distribuição de frequência do parâmetro sob exame adapta-se, quase sempre, a modelos teóricos de curvas de frequência (normal e logarítmica normal). O leitor encontrará ampla discussão do tema em Grossi Sad (1988, p. 65-79).

No momento interessa-nos classificar, em termos do

Grupo	Morfologia	Estrutura	Espessura	Distribuição dos Componentes
I	Regular	Contínua	Constante	Uniforme
II	Regular	Contínua	Variável	Uniforme
III	Irregular	Descontínua	Variável	Não Uniforme
IV	Muito Regular	Descontínua	Muito Variável	Não Uniforme
V	Extremamente Irregular	Descontínua	Altamente Variável	Não Uniforme

coeficiente de variação, os depósitos minerais e para tal, adotamos o esquema utilizado por Kreiter (1968), que é reproduzido na Tabela 6.3. A expressão do coeficiente de variação é:

$$\text{Distribuição normal } CV = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100$$

$$\text{Distribuição lognormal } VC = \sqrt{10^{e^2} - 1}$$

O coeficiente de variação pode ser utilizado para estabelecer o espaçamento do retículo exploratório, conforme a seguinte expressão (Kreiter, 1968):

$$E = P \left(\frac{e\%}{CV \cdot z} \right)$$

Onde E = espaçamento, P = perímetro do bloco estimado, e% = erro percentual

$$\left(e = z \cdot s / \sqrt{N \cdot \bar{x} \cdot 100} \right);$$

z = argumento da função normalizada de Laplace, que varia em função da probabilidade adotada; s = desvio padrão; N = número de furos e $\bar{x}$ = média do valor do parâmetro sob exame. Para um depósito com perímetro de 2.800 m (bloco com 1.000 x 400 m, por exemplo), e adotando-se um erro de 15% e um coeficiente de variação igual a 50% e ainda, uma probabilidade de 95%, tem-se espaçamento do retículo correspondente a 65 metros.

A classificação dos depósitos minerais, em termos de aceitação de valores máximos para um coeficiente de variação mostrado na Tabela 6.3 pode ser usada como um guia no estabelecimento do espaçamento. Por exemplo, para um valor do coeficiente de variação de 100% do conteúdo metálico de um depósito e aceitando como erro o valor de 15%, teríamos:

$$E = P \cdot 0,0225$$

Desse modo o espaçamento passa a depender do perímetro investigado, mantidos constantes o CV e o erro.

Métodos geoestatísticos

Os especialistas em pesquisa mineral admitem que as variações das propriedades de um depósito mineral são provocadas predominantemente por causas ambientais (que, em última análise, são os controles da mineralização ou metalotectos). Em virtude disso é de extrema importância considerar o posicionamento relativo dos pontos de controle (de amostragem) para avaliação da heterogeneidade ou homogeneidade do sistema e, principalmente, do comportamento direcional ou adirecional das propriedades sob exame, que pode ser sistemático (sem gradiente ou com gradiente regional), subsistemático (sem gradiente ou com gradiente) e assistemático (sem gradiente regional).

Tabela 6.1. Arranjos de exploração mineral por sondagem (S), serviços subterrâneos (SS) ou por uma combinação dos mesmos (S/SS). Segundo Kreiter, 1960 (apud Kuzvart & Böhmer, 1986).

Características do Depósito	Serviços		Espaçamentos (m)			C ₂
	Meio principal	Meio adicional	A	B	C ₁	
Grande, morfologia e mineralização contínuas, distribuição regular dos minerais úteis	S	S SS	100/200 2 a 4 níveis	200/400 Extrapolação a distância pequena	Extrapolação Extrapolação a distância grande	
Grande raramente médio, mineralização contínua ou não, morfologia constante, distribuição irregular dos minerais úteis	S/SS	S SS	2 níveis	60/200 3 a 4 níveis	Furos esporádicos	
Tamanho médio, mineralização descontínua, forma variada, distribuição irregular	S/SS	S	1 nível	2 níveis	Furos isolados com extrapolação a pequena distância	
		SS			Trabalhos isolados com extrapolação a pequena distância	
Tamanho pequeno, forma alongada, corpos muito descontínuos, distribuição muito variável dos constituintes úteis	SS			1 nível com subníveis	2 níveis de trabalho	
Muito pequeno	Pesquisa e lavra simultâneas					

Categoria do Recurso: A = medido, B = Indicado, C1 = inferido, C2 = possível

Tabela 6.2. Retículos de exploração mineral recomendados pela Comissão para os Recursos Minerais da União das Repúblicas Socialistas Soviéticas – URSS (segundo Kazhdan, 1988). Deve ser observado que o que se classifica como reservas é na realidade a classificação de recursos

Minério	Tipo de Depósito	Espaçamento do retículo ao longo da direção e mergulho (m)					
		Reserva Medida		Reserva Indicada		Reserva Inferida	
		Direção	Mergulho	Direção	Mergulho	Direção	Mergulho
FERRO	Depósitos de estrutura simples, espessura constante e distribuição uniforme do metal.						
	Grande, horizontal ou moderadamente inclinado, com espessura constante e mineralização uniforme.	200	200	400	400	800	800
	Grande, de mergulho forte ou estratificado, com grande extensão ao longo da direção e de espessura uniforme.	150	100	300	200	600	300
MANGANÊS	Grande estratificado, horizontal ou moderadamente inclinado, com distribuição composicional moderadamente regular e espessura constante.	150-200	150-200	300-400	300-400	600-700	600-700
BAUXITA	Grande, estratificado, teor moderadamente constante.	75-100	50-75	120-200	100-150	300-400	150-200
COBRE	Grande, estratificado ou então stockwerk de forma simples, distribuição uniforme dos constituintes úteis.	75-100		100-150		200-300	
NÍQUEL	Muito espalhado, horizontalizado, com estrutura simples, distribuição uniforme dos constituintes úteis.	100	100	200	200	400-600	400-600
POLIMETÁLICO	<i>Stratabound</i> , forma simples, distribuição moderadamente regular dos constituintes úteis.	(50-75)	(50-75)	100-150	100-150	150-200	150-200
MOLIBDÊNIO	<i>Stockwerks</i> grandes ou corpos lenticulares estratificados, com distribuição moderadamente regular dos constituintes úteis.	(50-60)	(60-80)	100-120	100-120	120-200	120-200
METAIS RAROS	<i>Stockwerks</i> grandes ou depósitos estratificados, forma moderadamente simples e mineralização moderadamente uniforme. Depósitos de estrutura complicada, espessura altamente variada e distribuição não uniforme do metal.	(50)	(50)	100	100	200	200
FERRO	Estratificado, grande, estrutura complicada, teor moderadamente constante, <i>stratabound</i> ou lente, tamanho médio, mineralização não uniforme.			150 (100)	100 (50-100)	300 150	200 100
MANGANÊS	Estratifica ou em forma lenticular, tectonicamente afetado, morfologia complicada, mineralização não uniforme.			150-200	50-100	300-400	100-150

continua...

Tabela 6.2. Continuação...

Minério	Tipo de Depósito	Espaçamento do retículo ao longo da direção e mergulho (m)					
		Reserva Medida		Reserva Indicada		Reserva Inferida	
		Direção	Mergulho	Direção	Mergulho	Direção	Mergulho
CROMITA	Veio ou lente, comprimento ao longo da direção de 300-1000m ou mais, espessura constante, falhado com blocos de 50 m ou mais.			(40-60)	(20-30)	80-120	40-60
BAUXITA	Estratificado ou lenticular grande, qualidade variável.			75-100	50-75	150-200	100-150
COBRE	Stockwerk grande ou lenticular complicado em forma, mineralização moderadamente uniforme. Veio ou lente de tamanho médio, morfologia complicada e distribuição não uniforme dos constituintes úteis.			75-100	75-100	150-200	150-200
				(50-75)	(50-75)	100-150	100-150
NÍQUEL	Estratificado, lenticular, grande, mergulhante ou veios com distribuição uniforme dos constituintes úteis. Estratificado, grande ou folhas com mineralização não uniforme. Veios, lentes ou depósitos estratificados como estrutura complexa a muito complexa e mineralização muito variável.			100-120	50-75	150-200	75-100
				40-60	40-60	80-120	80-120
				(20-40)	(20-40)	40-80	40-80
POLIMETÁLICO	Lente grande ou depósitos estratificados, forma complexa e mineralização predominantemente não uniforme. Lenticular ou veio de forma complexa e mineralização não uniforme.			(50-75)	(50-75)	100-150	100-150
						(75-100)	(50-75)
ESTANHO	Stockwerk grande. Velos e zonas mineralizadas de grande extensão (1 – 2 km) com mineralização não uniforme.			(50-60)	(50-60)	100-120	100-120
				(60-80)	(40-50)	120-160	60-80
MOLIBDÊNIO	Stockwerk grande, corpo estratificado grande, depósitos lenticulares e veios, com morfologia complicada e mineralização não uniforme. Grandes veios de espessura variável e pequenos, com mineralização não uniforme.			50-60	50-60	100-120	100-120
				(60-80)	(40-50)	120-160	120-160
TUNGSTÊNIO	Stockwerk grande e depósitos de morfologia complicada com mineralização não uniforme. Grande veios ou zonas mineralizadas.			(50-60)	(50-60)	100-120	100-120
				(60-80)	(40-50)	120-160	60-80
OURO	Grandes zonas mineralizadas com mineralização não uniforme. Zonas mineralizadas de tamanho médio, diques e lentes, mineralização não uniforme e limites complexos. Velos grandes e médios com distribuição irregular e muito regular da metalização.					(80-120)	(40-60)
						(60-80)	(30-40)
						(80-120)	(40-60)

continua...

6. Verificação da otimalidade do reticulo exploratório

Tabela 6.2. Continuação...

Minério	Tipo de Depósito	Espaçamento do retículo ao longo da direção e mergulho (m)					
		Reserva Medida		Reserva Indicada		Reserva Inferida	
		Direção	Mergulho	Direção	Mergulho	Direção	Mergulho
METAIS RAROS	Veios ou zonas mineralizadas de grande extensão e largura, forma complexa, mineralização não uniforme.			100	50	200	100
MERCÚRIO ANTIMÔNIO	Depósitos estratificados, grandes, zonas de veios com mineralização não uniforme.					100-200	(50-60)
COBALTO	Grandes veios e zonas de veios com mineralização não uniforme. Depósitos de estrutura muito complicada, espessura altamente variada e distribuição extremamente irregular do metal.					(80-120)	(40-60)
CROMITA	Veios, lentes, buchos (de dezenas de metros a 300m), falhados.					(40-60)	(20-30)
BAUXITA	Lentes de tamanho médio e qualidade variável.			50-75	25-50	75-100	50-75
COBRE	Lentes pequenas e veios com morfologia complexa.					(50-75)	(50-75)
POLIMETÁLICO	Veios, lentes, buchos; forma muito complicada.					(50-60)	(40-50)
ESTANHO	Veios e zonas mineralizadas de 0,3 – 1 km de extensão.					(60-80)	(40-50)
MOLIBDÊNIO	Veios de tamanho médio de pequena largura.					(60-80)	(40-50)
TUNGSTÊNIO	Idem.					(60-80)	(40-50)
MERCÚRIO ANTIMÔNIO	Corpo estratificado ou veios de tamanho médio.					(40-50)	(40-50)
METAIS RAROS	Veios ou zonas mineralizadas de extensão média e espessura pequena.					100	50
COBALTO	Corpos pequenos de forma irregular, buchos.					(25-40)	(25-40)
Os valores entre parênteses referem-se a espaçamentos de serviços subterrâneos.							

Tabela 6.3. Classificação dos depósitos minerais segundo sua variabilidade (adaptado de Kreiter, 1968)

GRUPO	TIPO DE DEPÓSITO	VARIAÇÃO	COEFICIENTE DE VARIAÇÃO (CV)		
			ESPESSURA	TEOR	RESERVAS (EM MÉDIA)
1. Regular	Depósitos sedimentares de carvão, folhelhos oleígenos, materiais de construção, calcário para cimento, enxofre, salgema, sais de potássio, fosforitos, alguns depósitos de ferro e manganês; o valor de CV atinge no máximo 10. Outros depósitos mais complexos de enxofre, argilas, caulim, manganês, ferro, etc., podem ter CV máximo igual a 40. Depósitos magmatogênicos simples incluem-se no grupo, o mesmo acontecendo com depósitos metamorfogênicos simples.	Usualmente regular	< 50	< 40	30
2. Irregular	Grande parte dos depósitos de cobre e depósitos de minério complexos não ferrosos, depósitos endógenos de não metálicos, alguns depósitos de tungstênio, molibdênio e ouro primário.	Usualmente Aleatória	30 – 80	400 – 100	80
3. Muito Irregular	Alguns depósitos complexos. A maior parte dos depósitos de tungstênio e molibdênio. Alguns depósitos de ouro. Quase todos os depósitos de metais raros e preciosos, em veios. Depósitos de metais não ferrosos com morfologia complexa e tectônica perturbada. Alguns depósitos endógenos e não metálicos.	Aleatória	50 – 100	100 – 150	130
4. Extremamente Irregular	A maioria dos depósitos de ouro e de metais raros. Depósitos pequenos ou muito perturbados, com distribuição complicada constituintes úteis.	Aleatória	80 - 150	130-300	200
Observação: Há dois tipos de variabilidade: regular ou aleatória. Para estabelecer o coeficiente de variação, o número mínimo de dados é 18 para o primeiro grupo 0,25 para o segundo grupo e 40 para o terceiro grupo.					

Tendo em vista do valor e o posicionamento do ponto de observação, podemos utilizar o **semi-variograma** para avaliar a otimalidade do retículo exploratório. O semi-variograma expressa as dessemelhanças entre os valores das amostras, através da metade do valor da somatória das diferenças ao quadrado, de pares de pontos separados por uma distância h :

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} [x(z_i) - x(z_i + h)]^2$$

As diferenças ao quadrado são analisadas segundo uma dada direção geométrica, com valores crescentes de h (iguais a um múltiplo do intervalo da amostragem). Consideremos o exemplo da Figura 6.2 onde se tem dados analíticos em uma linha de amostragem, de tal modo que podemos calcular os valores de semi-variograma experimental $\hat{\gamma}^*(\bar{h})$ para distância que são múltiplas do espaçamento. Na figura são mostrados os arranjos dos pares. O cálculo é simples: mede-se a diferença entre cada par, eleva-se ao quadrado, somam-se os quadrados e divide-se o resultado pelo dobro do número de pares de diferenças:

$$\begin{aligned}\gamma(h) &= (1-4)^2 + (4-3)^2 + \dots + (2-5)^2 / 2 \times 14 = 2 \\ \gamma(2h) &= (1-3)^2 + (3-5)^2 + \dots + (3-2)^2 / 2 \times 13 = 3 \\ \gamma(3h) &= (1-2)^2 + (2-6)^2 + \dots + (3-5)^2 / 2 \times 12 = 4,54 \\ \gamma(4h) &= (1-5)^2 + (5-2)^2 + \dots + (4-3)^2 / 2 \times 11 = 4,09 \\ \gamma(5h) &= (1-7)^2 + (7-5)^2 + \dots + (1-5)^2 / 2 \times 10 = 4,50 \\ \gamma(6h) &= (1-6)^2 + (6-4)^2 + \dots + (7-3)^2 / 2 \times 9 = 3,28 \\ \gamma(7h) &= (1-4)^2 + (4-5)^2 + \dots + (6-2)^2 / 2 \times 8 = 3,5 \\ \gamma(8h) &= (1-2)^2 + (4-1)^2 + \dots + (6-5)^2 / 2 \times 7 = 3\end{aligned}$$

O semi-variograma experimental da Figura 6.2 aponta para o aparecimento do patamar, a partir de espaçamento maior que $3h$, e o modelo se assemelha ao do semi-variograma esférico.

Quando cresce o espaçamento entre amostras, aumenta-se a dessemelhança entre seus valores, até alcançar uma distância a partir da qual $\gamma(h)$ não se modifica para modelos transitivos, isto é, a partir da qual não há mais dependência entre amostras.

O valor limite de h (independência entre amostras) é a **amplitude** ou **distância de influência**. O valor de $\gamma(h)$, correspondente à amplitude, chama-se patamar (C). Na Figura 6.3 ilustra-se o modelo ideal de semi-variograma (modelo esférico). Há outros modelos com patamares (transitivos) e sem patamar (não transitivos), todos abordados na bibliografia citada, provando-se a sua possibilidade “reveladora de estruturas”, notadamente em David (1977), Journel & Huÿbregts (1978), Rendu (1981) e Valente (1982), cujas obras são fundamentais para o estudo destas matérias.

Na Figura 6.4 tem-se um semi-variograma (modelo esférico) exibindo “efeito de pepita”, que mostra a existência de erros na coleta de amostras, na sua preparação e na análise. Adicionalmente reflete (caso não ocorram os erros mencionados) problema na escala amostral, ou seja, o espaçamento entre amostras é, para uma possível micro estrutura, maior que esta estrutura. Assim é conveniente adensar a malha para definir o modelo, para pequenos valores de $(\bar{h})$.

Os modelos com patamar tendem a ter $C = s^2$ (variância), como o seu limite. No presente trabalho, para simplicidade de exposição, não se considera a existência “efeito de pepita” (C_0), medida das heterogeneidades locais não detectadas na escala da amostragem adotada. Se existente tal C_0 , ele soma-se ao C referido, para se reproduzir a citada variância, ou seja, $s^2 = C_0 + C$.

Em primeira aproximação, a variância (s^2) aparecerá decomposta em duas parcelas: uma, o “efeito pepita” (C_0), medidor dos referidas heterogeneidades não detectados, mas também incluindo os erros humanos (de amostragem, de análise, de interpretação de modelos, etc), logo o (C) é a medida das aleatoriedades não “destruídas” na nossa análise ou pesquisa e com as quais faremos sempre que conviver; outra o “patamar” (C) que, portanto, será a medida do “componente estruturada” daquela variância (s^2), dando-nos a “dimensão” das variabilidades existentes e que saberemos trabalhar “geoestatisticamente” (ver bibliografia citada),

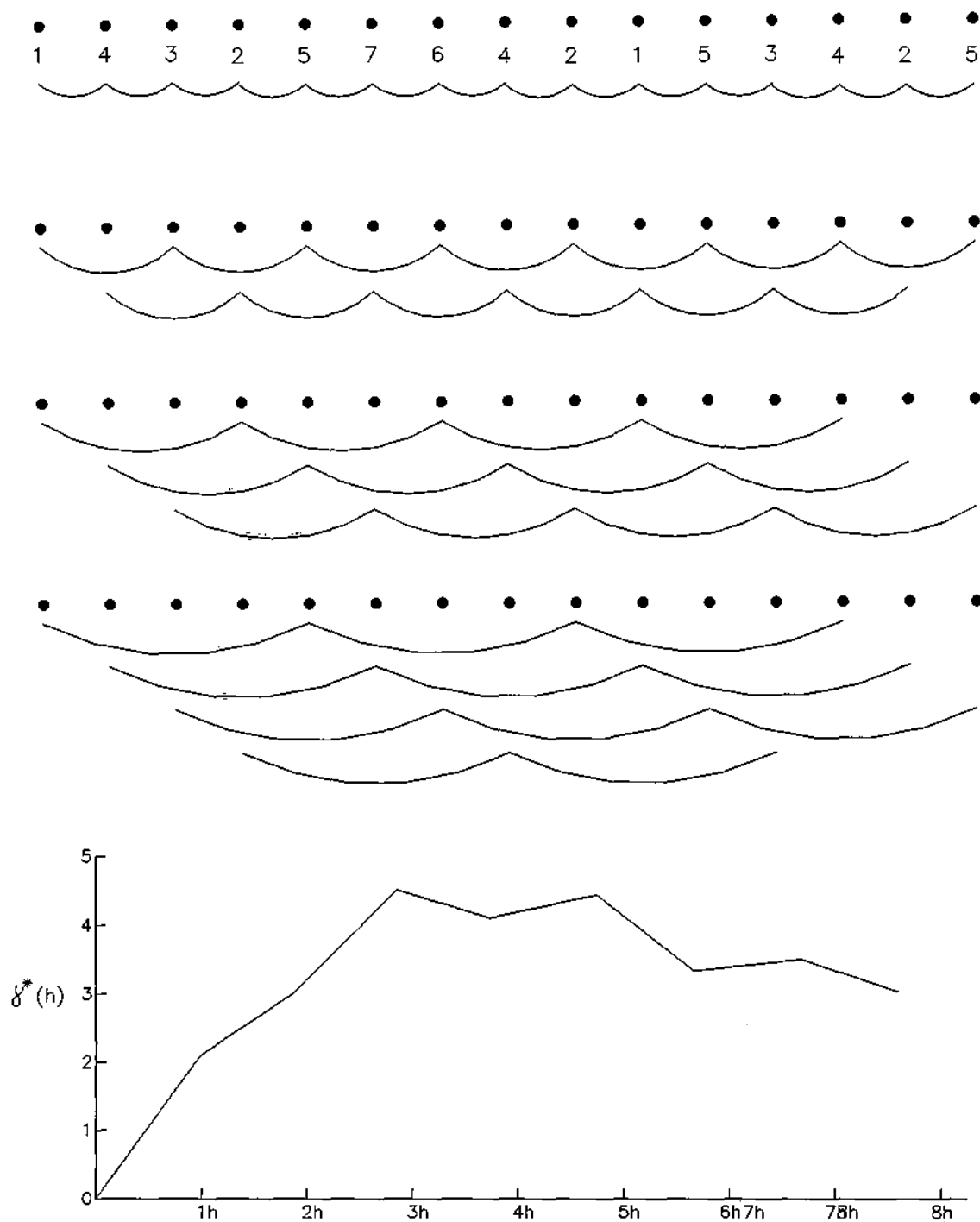


Fig. 6.2 Organização de pares para cálculo do semi-variograma. São mostrados apenas quatro espaçamentos crescentes. Na base da figura representa-se o semi-variograma experimental.

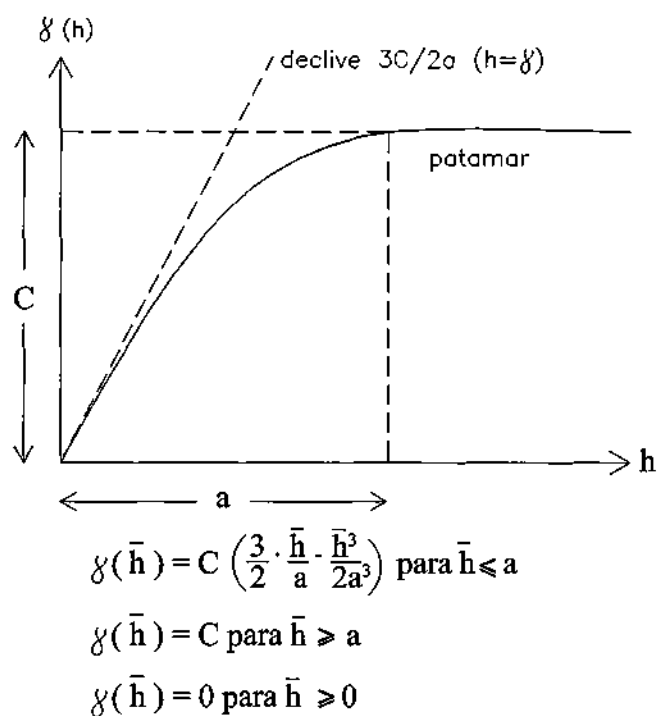


Fig. 6.3 Modelo esférico de semi-variograma. O valor de C é patamar, que corresponde ao valor (amplitude), para $h=a$.

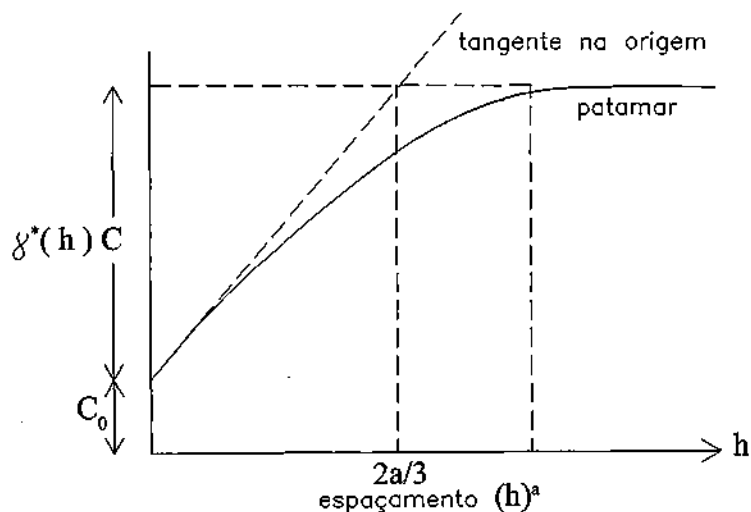


Fig. 6.4 Modelo esférico de semi-variograma, mostrando o "efeito de pepita".

Em princípio pode ser afirmado que o valor da amplitude corresponde ao espaçamento amostral máximo que se deve adotar para delinear um depósito mineral.

O leitor encontrará ampla exposição do tema que estamos a tratar, nos textos anteriormente mencionados, quando se comentou sobre krigagem, lembrando que havendo uma malha de amostragem, o semi-variograma deve ser calculado para diferentes direções, trabalhando-se com o valor médio vindo da ponderação pelo número de amostras consideradas em cada caso.

Outra ferramenta geoestatística de utilidade é o método não paramétrico das diferenças sucessivas, que também considera o posicionamento dos pontos de amostragem.

O valor de interesse é o desvio padrão das diferenças sucessivas, que tem por expressão:

$$s_{\Delta} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_{i-1} - x_i)^2}{2(N-1)}}$$

O grau de autocorrelação do arranjo espacial de pontos de amostragem (de Wijs, 1974) é expressado por:

$$f = \frac{s - s_{\Delta}}{s}$$

Valores negativos de f são interpretados como resultantes da ausência de autocorrelação. Quando positivos, podem ser usados na estimativa da otimalidade, admitindo-se que se o espaçamento entre os pontos é adequado, ocorre autocorrelação (em tese).

Para determinar o espaçamento adequado calcula-se, s , s_{Δ} e f . Para valor positivo muito baixo de f o espaçamento é inadequado. Se o valor é positivo e significativo, calculam-se valores de s_{Δ} para intervalos diferentes. A medida que cresce o intervalo, a média s_{Δ} aproxima-se de s e quando se equivale, acaba a autocorrelação.

Examinemos o exemplo representado pela sequência de valores dados na Figura 6.1 (uma linha de amostragem, com intervalo ou espaçamento igual a e). O desvio padrão é igual a $s = 1,84$, enquanto o desvio padrão das diferenças sucessivas, $s_{\Delta} = 1,46$. Assim, f é igual a 0,20.

Para intervalos progressivamente maiores obtemos:

Espaçamento	s_{Δ}
e	1,46
$2e$	1,60
$3e$	2,52
$4e$	3,16

Verifica-se que com espaçamento igual a $3e$, s_{Δ} é maior que s ; a média s_{Δ} é igual a $1,46 + 1,60 + 2,52/3 = 1,86$, muito próximo de $s = 1,84$. Assim, o espaçamento adequado não deve ser superior a $2e$, no exemplo citado.

Quando se tem um retículo de amostragem, procede-se de modo análogo ao do cálculo do semivariograma, isto é, obtém-se o valor médio para as diversas direções sob consideração, fileira a fileira semi-variograma.

Adensamento

É um método de verificação muito seguro, porém de difícil aplicação. Dois exemplos são apresentados nas Figuras 6.5 e 6.6.

O princípio do método é muito simples: comparam-se os resultados obtidos a partir da variação da geometria do retículo exploratório, através do adensamento dos serviços, segundo arranjo quadrado ou retangular. A comparação dos resultados pode ser feita através de modo gráfico ou analítico.

A comparação analítica pode ser feita do modo seguinte: constrói-se um gráfico de variação dos erros (por exemplo, estatístico), versus número de interseções de pesquisa. Avaliam-se os erros para a espessura, para o teor médio e para as reservas. O número ótimo de serviços é estabelecido em função de uma dada exatidão adotada para os resultados e sua densidade pode ser estabelecida como sendo um número que corresponde à razão entre o

tamanho da área explorada e o espaçamento entre serviços. No diagrama da Figura 6.7 observa-se que a curva de erro torna-se assintótica, a partir de um certo número de interseções.

Na Figura 6.8 mostra-se um exemplo de adensamento de malha; verifica-se que um resultado correto ou aceitável só é obtido com ampliação do número de interseções. A delineação do jazimento só é conseguido com malha densa, de curto espaçamento. É claro que se a estrutura do jazimento é simples, com adensamento discreto é possível traçar cuidadosamente os limites, com apoio do conhecimento geológico.

O custo envolvido com a aplicação do adensamento é elevado. Seja uma malha quadrada, com quatro nós de amostragem. Se diminuirmos para metade o espaçamento, adicionamos mais cinco nós (total: 9); se diminuirmos novamente pela metade, adicionamos mais 16 nós (total: $9 + 16 = 25$); repetida a operação, tem-se mais 56 nós (total: $25 + 56 = 81$), etc.

Para uma malha retangular, com um lado igual ao dobro da dimensão do outro, a diminuição, pela metade do espaçamento, introduz dois nós (total: $4 + 2 = 6$); a malha passa a ser quadrada; diminuída pela metade, ganham-se 9 nós (total: $6 + 9 = 15$); repetida a operação, tem-se 30 nós adicionais ($15 + 30 = 45$), etc.

O leitor percebe, de imediato, que o adensamento progressivo da malha é realizada quando há descontinuidade e heterogeneidade dos parâmetros de interesse.

O adensamento, quando muito intenso, passa a ser uma questão puramente econômica; a exploração mineral pode ser paralisada, em alguns casos, especialmente se os teores mantiverem-se muito baixos, oportunidade em que não se pode praticar a diluição.

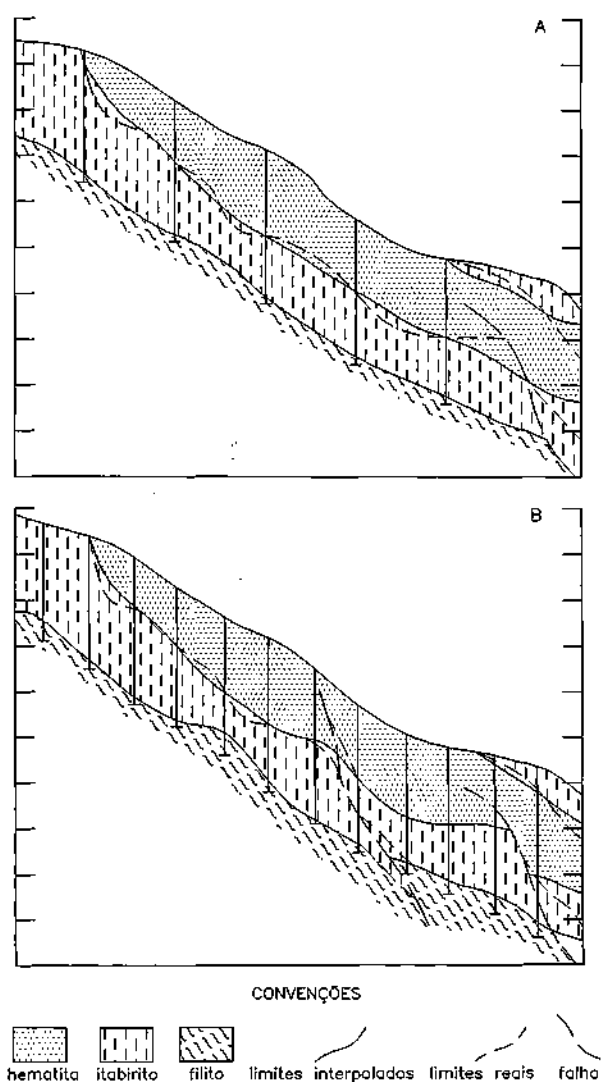


Fig. 6.5 Comprovação da otimalidade do retículo exploratório, ao se adensar as interseções exploratórias (passando de A para B, que está adensado).

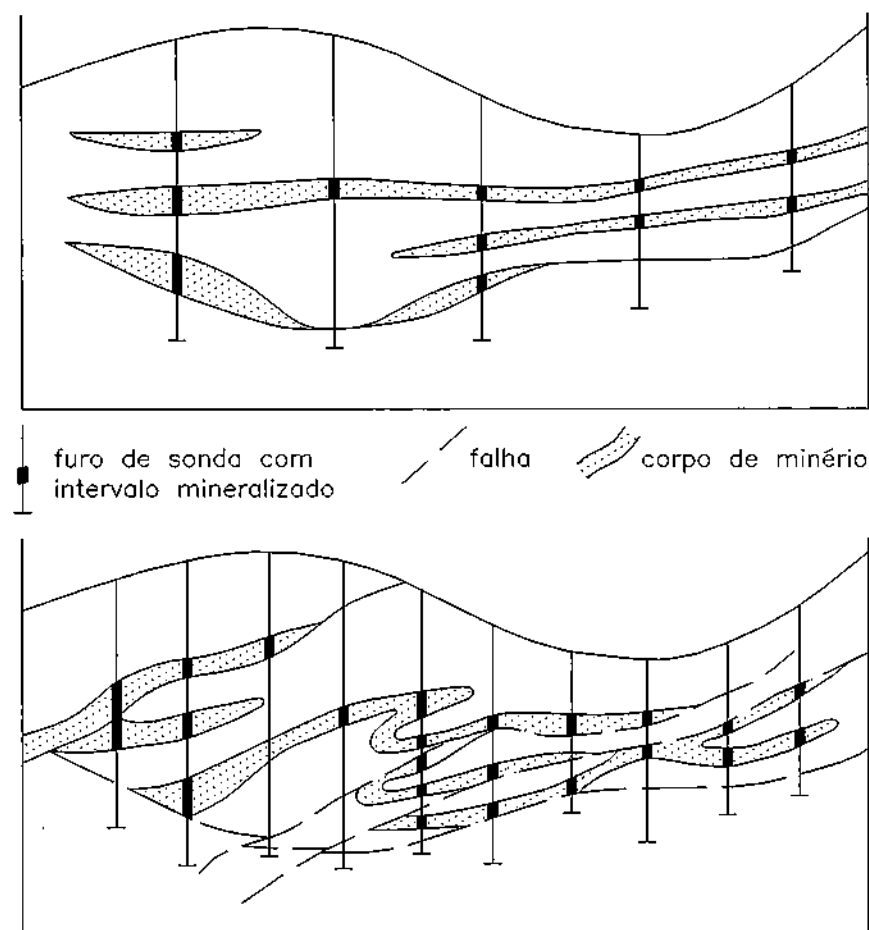


Fig. 6.6 Não comprovação da otimalidade do reticulo exploratório, quando se processa o adensamento.

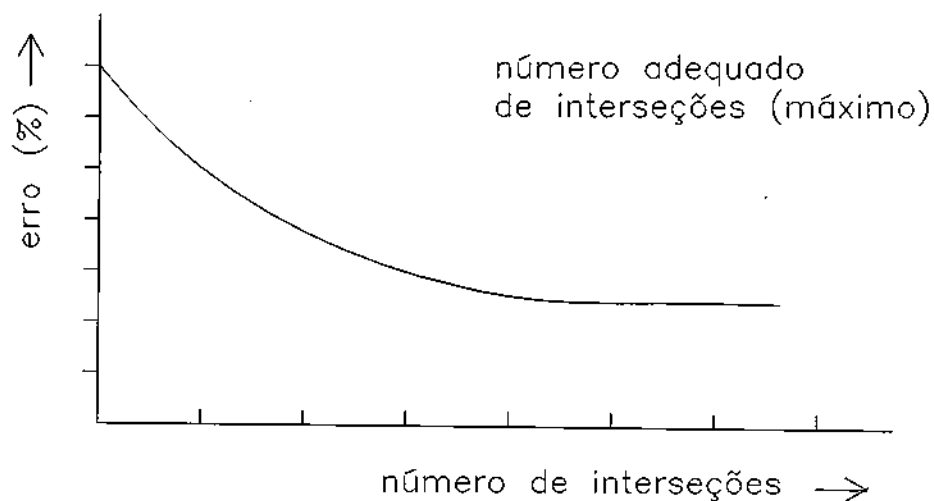
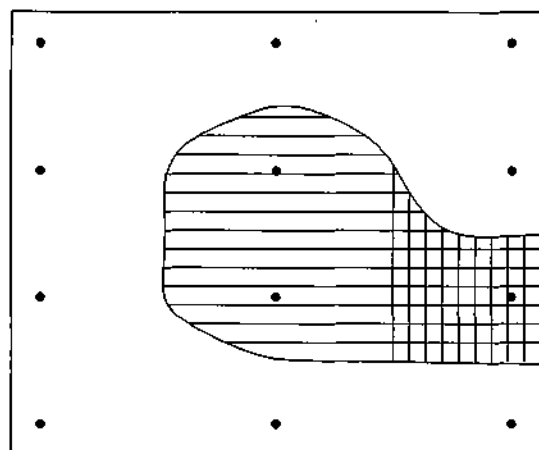
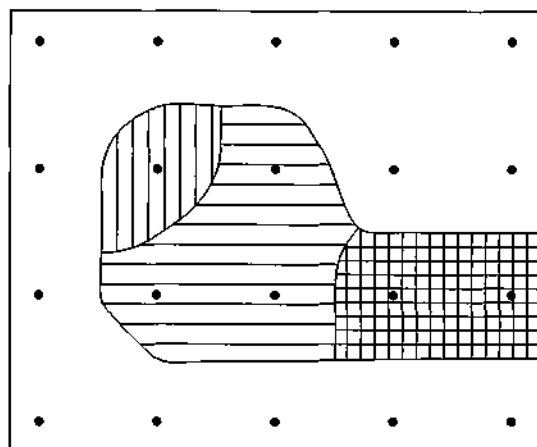


Fig. 6.7 Curva de variação do erro em função do número de interseções de exploração.

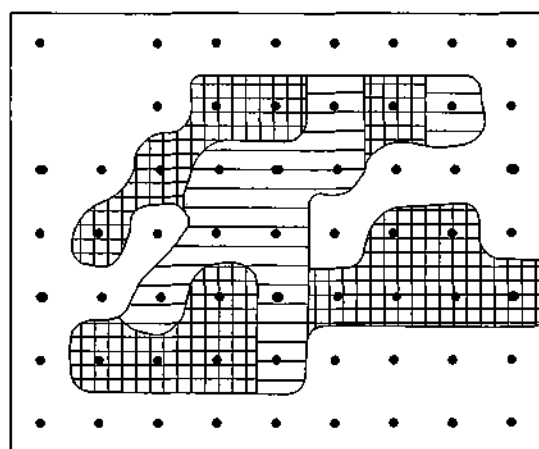
6. Verificação da otimalidade do reticulo exploratório



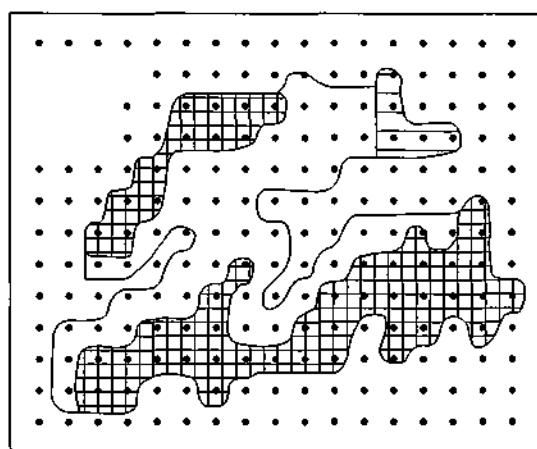
N=12



N=20



N=60



N=204

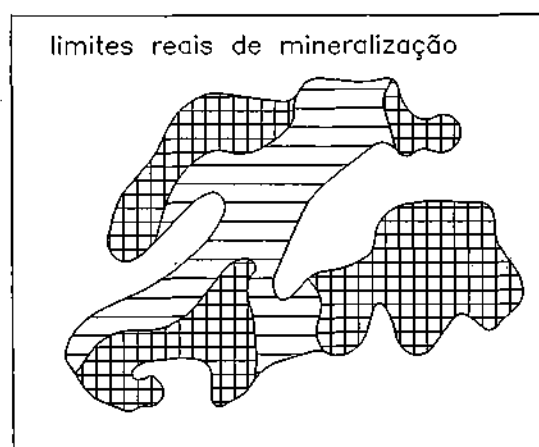


Fig. 6.8 Delineação de um jazimento de diferentes qualidades. Em função do adensamento da malha, ocorre variado tamanho das áreas ocupadas por minérios diferentes em qualidade.

7. Descontinuidade e heterogeneidade dos depósitos minerais

A delimitação dos depósitos minerais é mais difícil quando os mesmos são descontínuos. Assim, corpos de minério com dimensões menores que as da malha exploratória não podem ser delineados. Um ou outro serviço de exploração interceptará tais corpos e nesse caso o observador delinear os mesmos de modo genérico, com teor e reserva passíveis de avaliação apenas com suporte de lavra.

Mesmo descontínuos, alguns jazimentos exibem certas regularidades espaciais, detectáveis em função da escala da investigação. De qualquer modo, os corpos de minério desses depósitos têm contornos não muito claros.

Kazhdan (1988) propõe interessante método para a abordagem dos depósitos de estrutura descontínua. Chamando ΣV_m o volume de minério contido em um volume geral V , define-se *coeficiente de mineralização* como sendo a razão:

$$k = \frac{\Sigma V_m}{V}$$

Segundo Kazhdan (*op. cit.*), os jazimentos de estrutura descontínua têm grau de saturação classificável como *alto*, *moderado* e *baixo* ($k = 0,7 - 1$; $k = 0,25 - 0,7$ e $k < 0,25$, respectivamente), conforme Figura 7.1. Depósitos com $k < 0,25$ são de delimitação muito difícil ou mesmo, não possível.

Visando obter dados quantitativos sobre a extensão da mineralização usa-se o valor da descontinuidade (Kazhdan, 1988) definido pela expressão:

$$\mu = \frac{\Sigma_i - \Sigma_n + N}{\Sigma_m}$$

onde Σ_i = quantidade de intervalos mineralizados, Σ_n = quantidade de intervalos sem minério, N = número de interseções de exploração e Σ_m = a soma das espessuras mineralizadas. Exemplo: um jazimento explorado através de 20 furos apresenta os seguintes resultados:

Nº de Furos	Nº de Intervalos Mineralizados	Nº de Intervalos não Mineralizados	Comprimento das Porções Mineralizadas (m)
1	4	5	11
5	5 x 9 = 45	5 x 10 = 50	15
4	4 x 8 = 32	4 x 8 = 32	9
10	10 x 3 = 30	10 x 4 = 40	6
20	111	127	41

O resultado para a situação sob exame é um valor igual a $\mu = 6,29$.

O valor de μ se aproxima de zero quando os valores de Σ_i , Σ_n e N são muito pequenos, para Σ_m muito grande. Depósitos minerais com baixos valores de μ (menor que um) são facilmente delineáveis; o grau de dificuldade de delimitação cresce com o crescimento de μ , desde que N seja elevado.

Quando se trata de depósitos minerais, parâmetros como composição, estrutura e outras propriedades são descritos em termos de homogeneidade e heterogeneidade.

O estudo da homogeneidade (ou da heterogeneidade) só é possível quando estabelecermos a escala de observação, isto é, quando limitamos as dimensões do que estamos examinando. Devemos lembrar que admitimos como correto que o valor em uma estação de observação ou

de medida representa o valor de um bloco de tamanho definido.

Percebe-se a importância do espaçamento do retículo exploratório, na determinação do grau de homogeneidade de um depósito mineral. Assim, a estrutura do mesmo, se muito simples, pode ser estimada a partir de um retículo pouco denso. Contudo, se complexa, não é possível investigá-la com tal retículo.

O modo de investigação segue o princípio das aproximações sucessivas e por isso é preciso ter uma noção precisa da estrutura do jazimento, que a medida que avança a investigação, é aprimorada.

O estudo da homogeneidade (heterogeneidade) é feito, na prática, considerando-se diferentes escalas (domínios):

- a) De camadas ou zonas mineralizadas;
- b) De corpos nas camadas ou zonas mineralizadas;
- c) De setores dentro dos corpos;
- d) De enriquecimentos locais dentro dos setores;
- e) De agregados minerais;
- f) De grãos minerais.

Em geral, a delineação é feita com base na investigação dos dois primeiros itens acima mencionados, pois que, no momento, nosso interesse é limitar os corpos minerais,

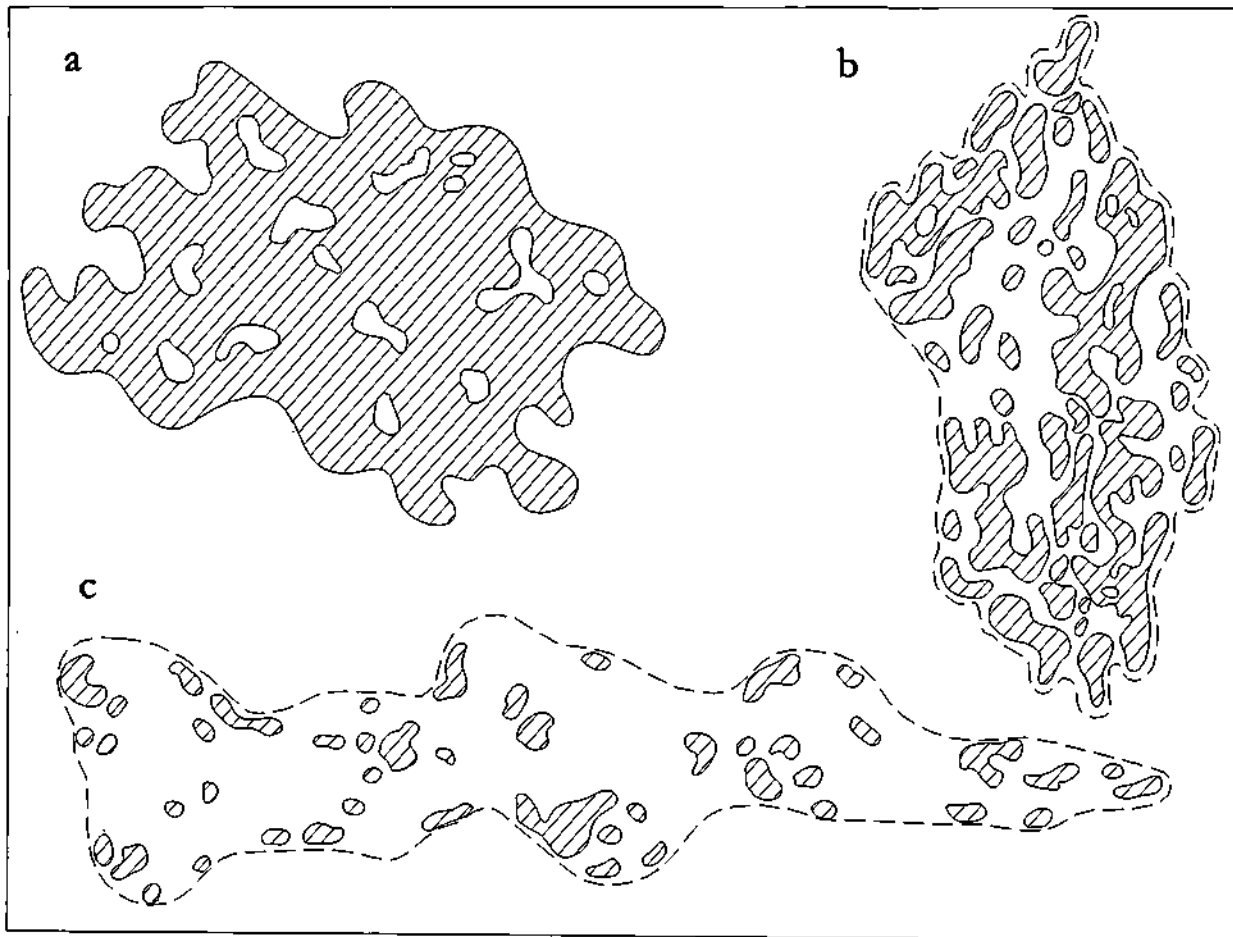


Fig. 7.1 Exemplos de estruturas descontínuas dos depósitos minerais. a, com alto conteúdo do mineral econômico; b, com conteúdo moderado do mineral econômico e c, com baixo conteúdo do mineral econômico (segundo Kazhdan, 1988).

para aprimorar, em seguida, o conhecimento sobre porções específicas (internas) dos mesmos.

Chama-se *corpo geológico* qualquer volume de rocha selecionado para estudo, sem restrição de tamanho. Por exemplo, o Batólito Serra dos Órgãos, no Estado do Rio de Janeiro, é um corpo geológico; analogamente, uma seção polida contendo um agregado de grãos minerais é um corpo geológico. Em nosso caso específico, a expressão será sempre usada com a conotação morfológica ou de arquitetura; assim, falaremos de diques, cordões, chaminés, soleiras, etc. mineralizadas, ou seja, acumulações de matéria mineral natural, limitadas por todos os lados e confinadas a um certo elemento estrutural ou combinação de elementos. Os limites do corpo podem ser naturais, tecnológicos ou econômicos.

Os depósitos minerais, como corpos geológicos que são, exibem variabilidade de forma, de teor, de composição mineralógica, etc. A exploração mineral tem como um dos seus objetivos estudar tal variabilidade que, via de regra, é feita com apoio da matemática, estatística e geoestatística, poderosas ferramentas auxiliares para detectar o grau de variabilidade de qualquer característica ou feição do depósito sob exame.

Os atributos ou propriedades sob investigação podem se comportar de modo *sistemático* (isto é, arranjados segundo um sistema) ou *assistemático*; por outro lado são direcionais ou não direcionais. Neste contexto é importante conceituar o que se entende por *homogeneidade* e *heterogeneidade*.

Um corpo geológico é homogêneo, em relação a uma certa feição, quando suas partes podem ser intercambiadas sem modificação do aspecto da feição sob exame. O grau de homogeneidade (seja ela direcional ou adirecional) cresce quando diminui o tamanho de suas partes intercambiadas. O campo de abrangência ou domínio (*Bereich*, em alemão) da parte sempre é um múltiplo da feição sob exame (Quade, 1984, p. 109-110). A uniformidade a que nos referimos subentende tanto propriedades físicas quanto químicas.

Na natureza não existe homogeneidade na verdadeira acepção da palavra, pois que a matéria é descontínua e o

conceito se aplica a meios contínuos. Por isto estabelecemos a homogeneidade de um certo atributo medido em um corpo geológico através da estatística; neste caso, estaremos comparando unidades de volume (ou componentes) suficientemente grandes em relação à heterogeneidade, o que implica que o conceito também depende da escala de observação. Em uma dada escala, o corpo geológico será homogêneo (estatisticamente) quando a média da configuração de qualquer componente for a mesma para todos os outros componentes de igual tamanho tomados do corpo. A escala na qual, o corpo pode ser descrito ou contemplado como homogêneo é o “domínio” do levantamento ou da feição investigada.

Na Figura 7.2 o conceito de homogeneidade estatística fica bem claro. O exemplo é utilizado para um corpo rochoso de granulação fina e a propriedade examinada é a composição mineralógica. Os dois componentes de igual tamanho e suficientemente grandes (Figura 7.2, I e II) são estatisticamente idênticos, isto é, são homogêneos. Contudo, quando diminuímos o tamanho dos componentes sob comparação, desaparece a homogeneidade e a natureza descontínua do agregado mineral fica patente (Figura 7.2 III e IV).

É importante não esquecer que corpos homogêneos em um aspecto específico (por exemplo, composição química) podem ser heterogêneos em outro aspecto (por exemplo, foliação).

Quando retiramos os elementos de volume para comparação, através de um certo método de amostragem, em geral geramos componentes (ou amostras) a granel. Se os fragmentos que compõem a amostra são aproximadamente do mesmo tamanho, teremos homogeneidade em relação ao tamanho. Se a composição química dos fragmentos é variável, ocorrerá heterogeneidade composicional.

A fixação dos conceitos de atributos não direcionais e direcionais é feita com auxílio das Figuras 7.3 e 7.4. Na Figura 7.3 A, o modelo tem valores individuais semelhantes entre si, dentro de limites de erros permissíveis de observação ou experimentação. Para tornar mais realista

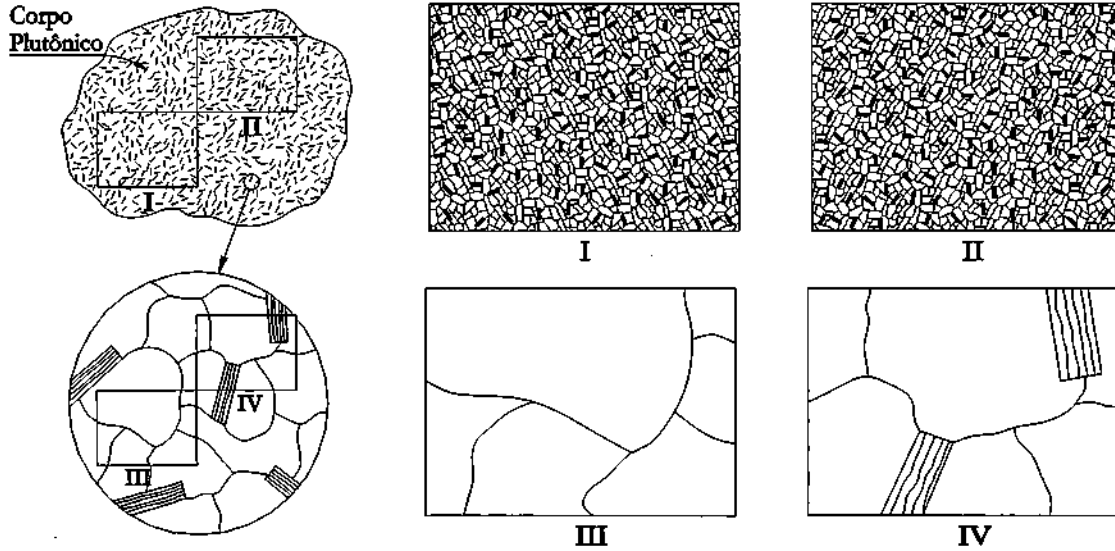


Fig. 7.2 Representação dos conceitos de homogeneidade e heterogeneidade, em função da escala (segundo Turner & Weiss, 1963). As amostras I e II são homogêneas, enquanto as amostras III e IV, de uma parcela muito menor do corpo, são heterogêneas.

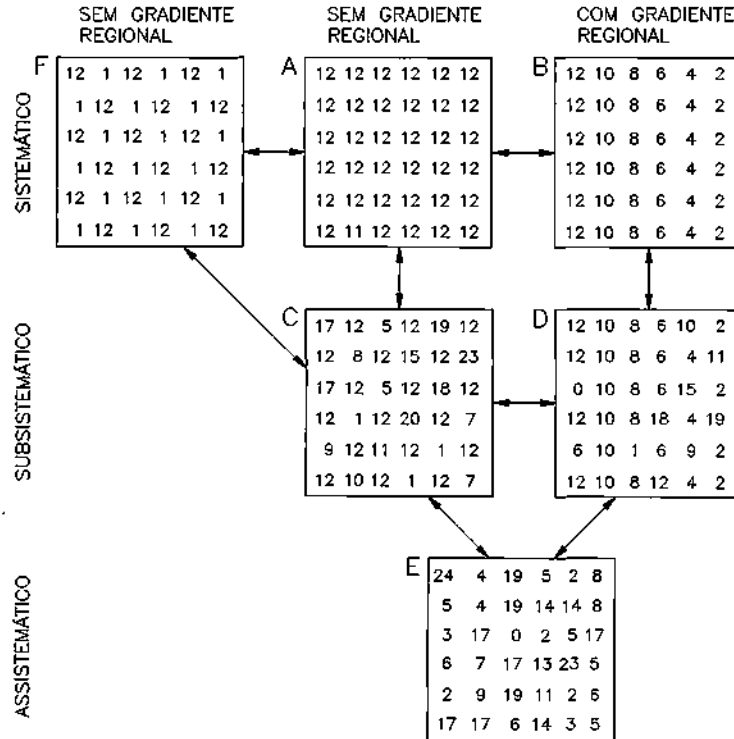


Fig. 7.3 Representação de arranjos onde o atributo se comporta de modo adirecional (segundo Whitten, 1966)

o modelo, consideremos que o atributo medido é o teor em Pb + Zn de um corpo horizontalizado, em forma de folha e de espessura constante. Não há um gradiente através da área do corpo. O intervalo de confiança ao redor do valor médio é muito pequeno, isto é, a variabilidade é pequena, de modo que a propriedade teor se comporta de modo sistemático. O intervalo de confiança define os limites no interior dos quais é válida a média verdadeira, para uma dada probabilidade (p. ex., 95%).

Na Figura 7.3 B o teor mostra gradiente nítido através da área; o intervalo de confiança ao redor do valor médio é relativamente grande; o comportamento da variação do teor é perfeitamente previsível, de modo que se tem um esquema ainda sistemático. O modelo poderia estar representando a espessura de uma cunha mineralizada.

Na Figura 7.3 E, o teor varia fortemente; dado um valor não se pode prever o seguinte; não há qualquer gradiente através da área. O intervalo de confiança é significativo, ou seja, a variabilidade é grande. A Figura 7.3 F ilustra um arranjo (de teor, por exemplo) sem qualquer gradiente através da área, sendo que o comportamento é sistemático (i.é, segue um esquema alto-baixo-alto...). Transições entre os modelos apresentados são mostrados nas Figuras 7.3 E e 7.3 D. As setas conectando cada mapa de teor da Figura 6.3 indicam o modo pelo qual se passa de um para outro modelo.

Um corpo geológico no qual existe a mesma frequência estatística em todas as possíveis direções é isotrópico (por exemplo, um granito homófono). Com a orientação crescente de um ou mais elementos, o corpo fica, passo a passo, mais *anisótropo*, como exemplificado pela sequência argilito-folhelho-xisto (Quade, *op. cit.* P. 169).

Se tratamos de atributo direcional, a Figura 7.4 ilustra o conceito. Ainda neste caso há arranjos com e sem gradiente regional, com variação sistemática e não sistemática. A propriedade examinada é, por exemplo, a orientação linear de agrupamento de um dado mineral de interesse econômico. Na Figura 7.4 A, a delineação representada por seu traço não exibe gradiente regional e tem um arranjo

sistemático. O intervalo de confiança ao redor do rumo médio é pequeno. Na Figura 7.4 B há gradiente regional e a variação se dá de modo sistemático. Na Figura 7.4 E não se percebe gradiente regional e a variação é assistemática. Transições entre os modelos são indicadas nas Figuras 7.4 E e 7.4 D.

O conceito de homogeneidade pode ser aplicado aos modelos examinados nas Figuras 7.3 e 7.4, considerando-se como homogênea a propriedade que não apresenta gradiente através da área e que tem limite de confiança pequeno (Figuras 7.3 A e 7.4 A). Em caso contrário, tem-se heterogeneidade (por exemplo, Figuras 7.3 E e 7.4 B).

O estabelecimento de esquemas com e sem gradiente, sistemáticos e assistemáticos é muito importante, pois pode-se prever (ou não) o que a seguir se encontrará com grande segurança.

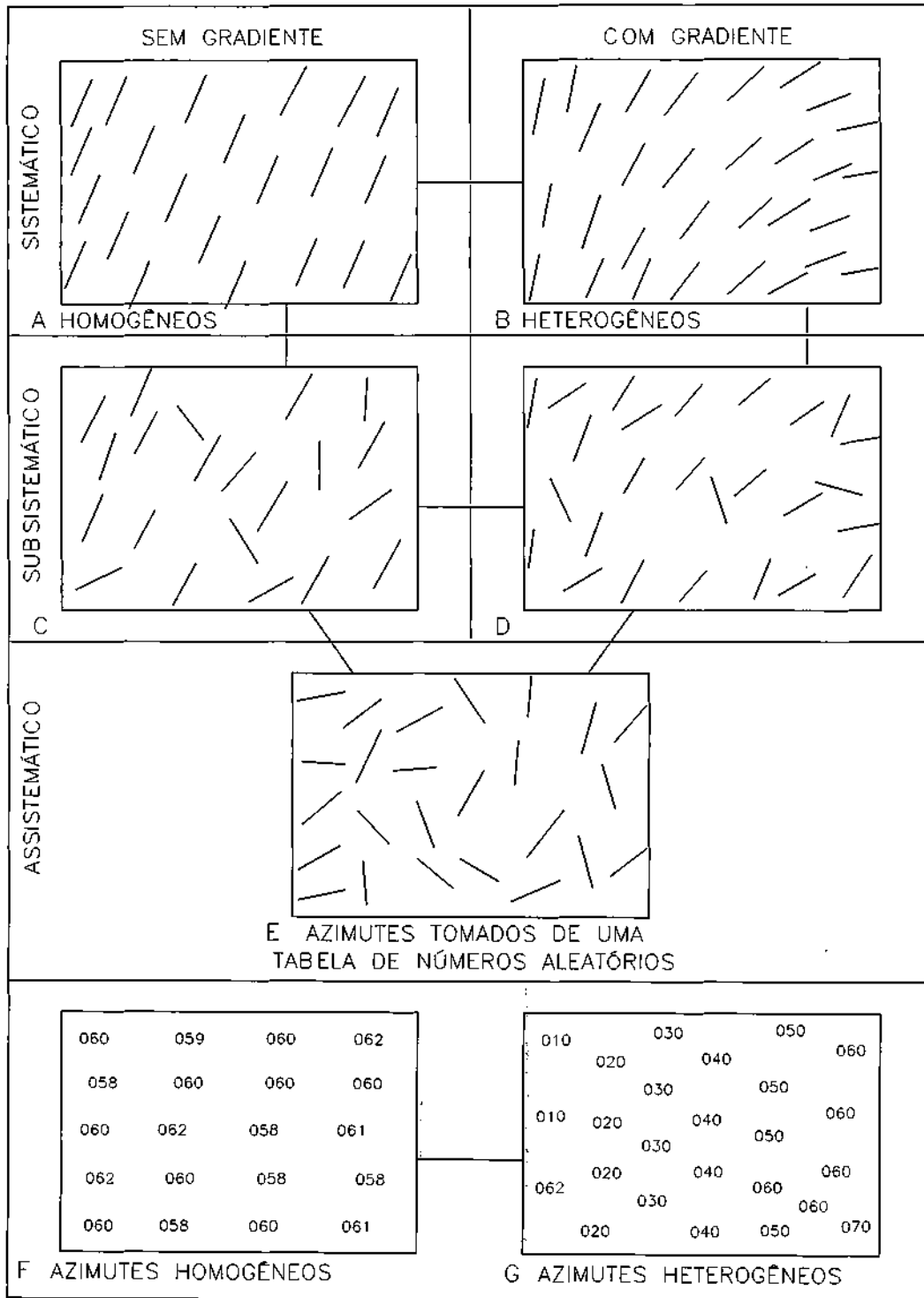


Fig. 7.4 Representação de arranjos onde o atributo se comporta de modo direcional (segundo Whitten, 1966)

8. Erros e sua determinação

Erros podem ser introduzidos nas várias fases da exploração mineral e para avaliá-los é importante conceituar o que é **exatidão** e o que é **precisão**.

O valor real para um dado parâmetro de um corpo mineral, estimado como média ou como variância, nos informa que tal valor é exato e, por isso, se a medida é exata ela é isenta de erros. A precisão é o grau de flutuação do valor de uma variável, sem se considerar a acurácia. A Figura 8.1 ilustra os conceitos de acurácia (exatidão) e precisão.

Os erros em relação à investigação dos parâmetros de um depósito mineral compreendem **erros de interpretação**, **erros técnicos** e **erros analíticos**.

Erros de interpretação

Os erros de interpretação são, também, chamados de erros geológicos. Quase sempre derivam do modelo atribuído ao depósito sob exame. Um modelo é um padrão empírico e/ou conceitual. Os aspectos descritivos (empíricos) são empregados na investigação do depósito. A explicação para a ocorrência desses aspectos, sob um ponto de vista de processos geológicos tem como base a parte conceitual do modelo.

No tocante à interpretação dos parâmetros de um depósito o erro mais comum é a tendência de admitir como princípio que a interpretação mais simples é a mais correta.

Outro erro comum é admitir similaridade geológica com outros depósitos com base em aspectos descritivos

quando, na verdade, tais aspectos são fortuitos ao ambiente e não essenciais. Por exemplo, nos depósitos arqueanos de ouro, do distrito de Barão de Cocais, têm posicionamento nos contatos de rochas máficas – ultramáficas com rochas sedimentares (por exemplo, no depósito Brumal). Contudo, tal aspecto não é generalizável, pois pode ocorrer ou não mineralização; na principal mina do distrito não há rochas máfica-ultramáficas.

Um terceiro erro é admitir, por comparação com outros depósitos, que há persistência da mineralização ao longo da direção e do mergulho.

Os erros geológicos ocorrem por falta de experiência e de desconhecimento da tipologia dos depósitos minerais, levando à utilização inadequada do sistema de pesquisa e à não precisão de medidas (por exemplo, de espessura, área, densidade, etc.). É necessário considerar que a representação incorreta (em mapas e seções geológicas) do depósito mineral, conduz a erros significativos.

Erros técnicos

Erros técnicos são aqueles devido a técnicas e métodos inadequados na determinação do valor das variáveis presentes no depósito mineral. Erros casuais e/ou sistemáticos devem ser avaliados e eliminados, pois podem provocar aumento ou diminuição da quantidade e qualidade da substância mineral sob exame.

Erros casuais (aleatórios)

São erros acidentais, ocorrendo ao acaso; flutuam ao redor do valor real, para cima e para baixo (Figura 8.2) e compensam-se quando o número de determinações da variável sob investigação é elevado.

O erro casual ou aleatório pode ser definido como sendo a diferença entre os resultados de duas determinações, isto é, $a - b = d$; outra definição: é a separação de cada valor de um valor médio, isto é,

$$a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2} = \frac{d}{2}.$$

O valor da determinação deve ser tomado como sendo igual a média dos dois valores ou seja, $(a + b) / 2$ (Figura 8.3). Se os valores das duas determinações são iguais, seu registro é feito na diagonal do diagrama.

Considerando como erro casual a diferença $a - b$, ela é representada graficamente como sendo o segmento que se obtém prolongado b sobre a . Se o erro casual é representado por

$$\frac{a-b}{2} = \frac{d}{2},$$

o valor corresponde ao comprimento da perpendicular baixada de $x = (a + b / 2)$ sobre qualquer das retas que representam a ou b . O valor $d / \sqrt{2}$ não serve para definir o erro porque sua direção difere daquela dos eixos de coordenadas.

Utilizando os dados da Tabela 8.1, podemos utilizar a outra definição de erro absoluto médio, isto é $d / 2$:

$$\frac{d}{2} = \frac{6,05}{2} = \pm 3,025\%$$

$$\text{e portanto, } \frac{3,025}{2} = \pm 0,121\%$$

que é o valor do erro absoluto aleatório médio com um desvio padrão de 0,06%. O erro relativo aleatório médio seria igual a:

$$\frac{3,025}{52,59} \times 100 = 5,75\%$$

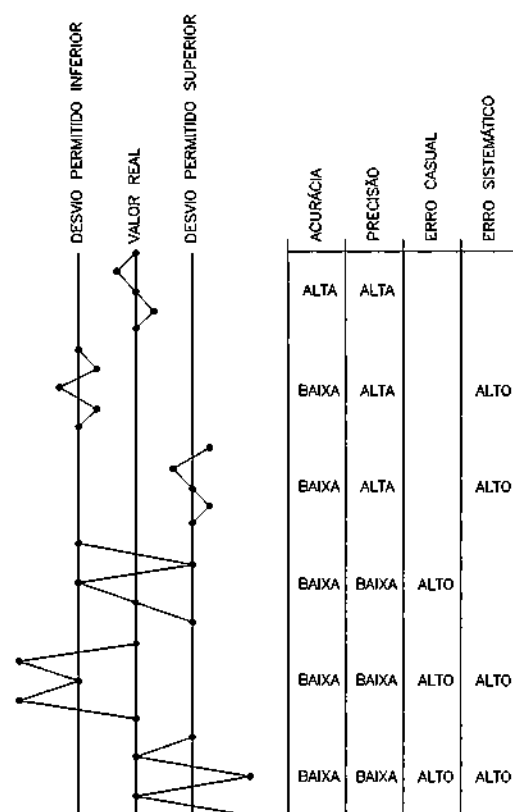


Fig. 8.1 Conceitos de acurácia e precisão (com erros decorrentes), aplicados a cinco análises repetidas de uma mesma amostra (segundo Grossi Sad, 1986).

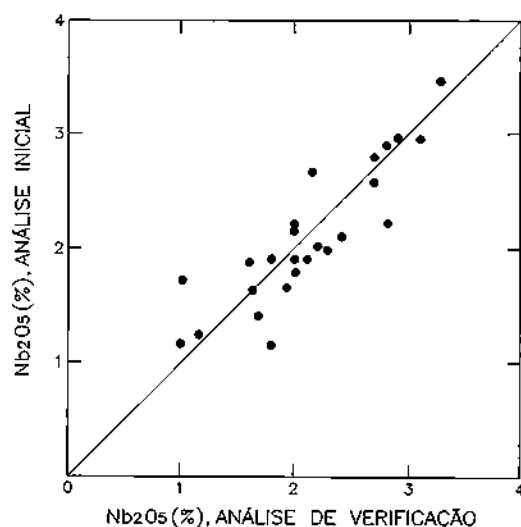


Fig. 8.2 Representação gráfica dos resultados da Tabela 8.1 (segundo Grossi Sad, 1986).

No estabelecimento do erro aleatório pode-se empregar o método sugerido por A. P. Prokofiev (*apud* Kreiter, 1968), discutido a seguir, com auxílio de um exemplo, utilizando dados da Tabela 8.1. Os dados da tabela estão graficamente assinalados na Figura 8.2.

Chama-se erro absoluto aleatório médio à média aritmética dos desvios das amostras individuais, independentemente do sinal positivo ou negativo dos desvios. Assim, para o caso da Tabela 8.1, tem-se:

$$\sum d / N = 6,05 / 25 = 0,24\%$$

Tabela 8.1. Cálculo do erro aleatório, para análises de minério de nióbio (% em peso)

Amostras	Conteúdos		Sinal e Valor dos desvios
	Análise principal	Análise de verificação	
1	1,15	1,18	+0,03
2	1,74	1,00	-0,74
3	2,23	2,79	+0,56
4	1,99	2,27	+0,84
5	1,65	1,92	+0,27
6	1,90	1,80	-0,10
7	2,69	2,15	-0,54
8	2,22	2,00	-0,22
9	3,47	3,27	-0,20
10	2,15	2,42	+0,27
11	1,92	2,12	+0,23
12	1,79	2,00	+0,21
13	1,67	1,61	-0,06
14	1,25	1,18	-0,07
15	1,39	1,66	+0,27
16	1,91	1,99	+0,08
17	1,87	1,58	-0,29
18	1,17	1,00	-0,17
19	2,22	1,97	-0,25
20	2,60	2,71	+0,11
21	2,76	2,70	-0,06
22	2,04	2,21	+0,17
23	2,93	3,07	+0,14
24	2,91	2,81	-0,10
25	2,97	2,90	-0,07
Totais	52,59	52,31	6,05
Médias	2,10	2,09	--

Conforme assinala Kreiter (*op. cit.*), "um erro freqüente, quando se determina a magnitude do erro casual, é comparar os

resultados médios das análises principais e de verificação". Por exemplo, no caso discutido tem-se que a diferença entre as médias aritméticas dos dois conjuntos de análises é:

$$\text{Análise principal: } \frac{\sum_{i=1}^{25} x_i}{N} = \frac{52,59}{25} = 2,10\%$$

$$\text{Análise de verificação: } \frac{\sum_{i=1}^{25} x_i}{N} = \frac{52,31}{25} = 2,09\%$$

$$\text{Diferença entre médias: } 2,10 - 2,09 = 0,01\%$$

Esta magnitude da diferença não tem qualquer significado em termos de valor real do erro.

Chama-se *erro relativo aleatório médio* ao valor percentual que se obtém dividindo-se o erro absoluto pelo valor médio da análise principal:

$$\frac{\sum_{i=1}^n d / n}{\sum_{i=1}^n x_i / N} \times 100 = \frac{\sum_{i=1}^n d}{\sum_{i=1}^n x_i} \times 100 = \frac{6,05}{52,59} \times 100 = 11,50\%$$

A principal característica do erro aleatório é sua dependência do teor médio; se examinarmos a Tabela 8.2 notamos tal dependência, uma vez que os erros médios permissíveis dependem da faixa de teor. Não existe uma regra geral quanto à maneira de apresentação do erro, ou seja, sob forma absoluta ou relativa. Por exemplo, para um dado minério com amostras exibindo teores de 60%, 6% e 0,6%, o erro absoluto de 1% seria apresentado do modo seguinte:

$$60 \pm 0,6, \text{ isto é } 60,6 \text{ ou } 59,4\%$$

$$6 \pm 0,06, \text{ isto é } 6,06 \text{ ou } 5,94\%$$

$$0,6 \pm 0,006, \text{ isto é } 0,6006 \text{ ou } 0,594\%$$

Por outro lado teríamos, sob forma de erro relativo:

$$\frac{0,6}{60} \times 100 = \pm 1\% \quad \frac{0,06}{6} \times 100 = \pm 1\%$$

$$\frac{0,006}{0,6} \times 100 = \pm 1\%$$

Tabela 8.2. Erros permissíveis em análises de minérios, segundo a Comissão Nacional de Reservas Minerais da URSS (segundo Smirnov, 1960, *apud* Kazhdan, 1988).

		Teor %	Erro % ±		Teor %	Erro % ±
Al_2O_3		> 20 5 - 20 - 5	2 - 4 4 - 8 8 - 20	Mn	> 5 1 - 5 0,05 - 1	2 - 4 4 - 7 7 - 20
Ag(g/t)		> 100 30 - 100 10 - 30	1 - 3 3 - 5 5 - 12	MgO	> 5 1 - 5	3 - 10 10 - 20
As		> 2 0,5 - 2 > 0,5	1 - 5 5 - 7 10	Nb	> 10 1 - 10 0,01 - 1 < 0,01	3 - 5 5 - 10 10 - 20 20
Au (g/t)	(a)	Tamanho < 0,1mm	> 60 16-64 4-16 < 4	Ni	1 - 5 0,2 - 1 < 0,2	3 - 7 7 - 15 15
	(b)	Tamanho < 0,1-0,6mm	> 64 16-64 4-16 < 4	P	> 3 0,3 - 3	3 - 7 7 - 15
	(c)	Tamanho < 0,6mm	> 64 16-64 4-16 < 4	Pb	> 15 6 - 15 0,5 - 6 < 0,5	2 - 4 4 - 6 6 - 12 12
$BaSO_4$		> 5 1 - 5	1 - 7 7 - 15	S	> 20 1 - 20 0,05 - 1	1 - 2 2 - 5 5 - 10
Be		5 - 10 0,01 - 5 0,01 - 0,1	3 - 5 5 - 10 10 - 30	Sb	> 2 0,2 - 2	3 - 12 12 - 20
Bi		> 0,6 0,2 - 0,6	5 - 10 15 - 20	SiO_2	30 - 50 10 - 30 3 - 10	2 - 3 3 - 8 8 - 15
CaO		> 1 0,1 - 1 0,01 - 0,1 < 0,01	3 - 5 5 - 10 10 - 30 30	Sn	> 1 0,25 - 1 0,05 - 0,24	3 - 7 7 - 15 15 - 30
Cd		> 1 0,01 - 1 0,01 - 0,1 < 0,01	3 - 5 5 - 10 10 - 30 30	Ta	> 10 1 - 10 0,1 - 1 < 0,1	3 - 5 5 - 10 10 - 20 20
Co		> 0,5 < 0,5	2 - 6 6	TiO_2	2 - 15 0,1 - 2	2 - 5 5 - 20

Tabela 8.2 Continuação

		Teor %	Erro % ±		Teor %	Erro % ±
Cr		> 10 1 - 10 < 1	1 - 3 3 - 7 7	V	> 0,5 0,06 - 0,5	3 - 10 10 - 30
Cu		> 3 0,5 - 3 < 0,5	3 - 7 7 - 10 10 - 15	WO ₃	> 1 0,25 - 1 0,05 - 0,25	3 - 8 8 - 15 15 - 30
Fe (total)		> 30 10 - 30 5 - 10	1 - 2 2 - 4 4 - 8	Zn	> 25 10 - 25 0,5 - 10 < 0,5	2 - 3 3 - 6 6 - 15 15
FeO		> 5 1 - 5	2 - 4 4 - 7	Zr	> 3 1 - 3 0,1 - 1 < 0,1	2 - 5 5 - 10 10 - 15 15 - 20
Hg		> 2 0,25 - 2 < 0,25	4 - 7 7 - 15 15 - 30	Mo	> 1 0,25 - 5 < 0,25	2 - 5 5 - 10 10 - 20

- a) Ouro finamente disperso, principalmente em sulfetos < 0,1 mm
 b) Ouro de grão médio, em sulfetos e quartzo < 0,6 mm
 c) Ouro de grão grande, visível, principalmente em quartzo > 0,6 mm

Como o erro aleatório depende do teor médio, a equação que o representa tem dois componentes, um, dependente do teor e outro, independente, pois devemos lembrar que toda e qualquer medida tem algum erro. Deste modo, chamando E_m o erro aleatório médio, T_m o teor médio e α a parcela do erro independente do teor, podemos escrever:

$$E_m = f(T_m, \alpha)$$

De modo simples, a questão é resolvida com a adaptação de uma reta aos pontos que representam os teores corrigidos da primeira análise, considerando-se o erro aleatório. A equação geral para uma reta é:

$$y = a + bx$$

onde a e b são parâmetros da equação, y representa os teores corrigidos e x o teor médio. Em síntese, dados os dois conjuntos de análises, principal e de controle, devemos estimar a e b . Através do método dos mínimos quadrados devemos minimizar a expressão:

$$f(a, b) = \sum (y - [a + bx])^2$$

para a qual os valores procuramos são:

$$a = \bar{y} - b\bar{x} \quad \left(\bar{y} = \sum y / N ; \bar{x} = \sum x / N \right)$$

$$b = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sum (x - \bar{x})^2}$$

O exemplo dado a seguir esclarecerá a aplicação das expressões acima apresentadas. Na Tabela 8.3 são reproduzidos os resultados de análise principal e de controle, em minério de níquel de um certo depósito, para as seguintes faixas de teor: < 0,5%, 0,5 - 3% e > 3%. Para cada faixa foram realizadas 15 novas determinações internas. O seguinte quadro pode ser organizado a partir dos dados da tabela:

	x	y	x^2	xy
	0,28	0,038	0,0784	0,0106
	1,81	0,128	3,2761	0,2317
	4,82	0,185	22,2784	0,7770
Total	6,81	0,351	25,6329	1,0193

que nos fornece:

$$\sum y = Na + b \sum x$$

$$\sum xy = a \sum x + b \sum x^2$$

ou seja:

$$0,3510 = 3a + 6,81b$$

$$1,0193 = 6,81a + 25,6326b$$

Portanto $a = 0,0676 \approx 0,07$, $b = 0,0218 \approx 0,022$ e, em consequência:

1) Erro aleatório médio para teores < 0,5% Ni:

$$Y = 0,07 + 0,022 \cdot 0,28 = 0,076 (\approx 27\%)$$

2) Erro aleatório para teores entre 0,5 e 3% Ni:

$$Y = 0,07 + 0,022 \cdot 1,81 = 0,1098 (\approx 6\%)$$

3) Erro aleatório médio para teores > 3% Ni:

$$Y = 0,07 + 0,022 \cdot 4,72 = 0,1738 (\approx 4\%)$$

Os resultados mostram que há uma parcela constante de erro (0,07) e outra, dependente do teor médio (0,022 . x).

O erro aleatório por mostrar valores com sinal positivo e negativo, tende a ter média muito próximas para a determinação principal e para a determinação de verificação, pois, ao aumentar o número de determinações ocorre compensação. Por outro lado, ele é estatisticamente independente, de observação a observação, e segue a lei normal de distribuição.

Tabela 8.3. Análise principal e de verificação em minério de níquel (% em peso), para determinação do erro aleatório.

Número da análise	Faixas de teor								
	< 0,5%			0,5 – 3%			> 3%		
	Análise Principal	Análise de Controle	d/2	Análise Principal	Análise de Controle	d/2	Análise Principal	Análise de Controle	d/2
1	0,25	0,31	+ 0,03	1,48	2,01	+ 0,265	3,98	4,60	+ 0,31
2	0,39	0,22	- 0,085	2,80	2,99	+ 0,095	4,72	4,12	- 0,30
3	0,18	0,12	- 0,03	0,67	0,86	+ 0,095	4,91	5,25	+ 0,17
4	0,47	0,40	- 0,035	1,96	1,56	- 0,20	5,16	5,00	- 0,08
5	0,39	0,45	+ 0,045	2,34	2,10	- 0,12	6,44	6,98	+ 0,27
6	0,24	0,32	+ 0,04	2,25	1,95	- 0,15	5,39	5,74	+ 0,175
7	0,13	0,08	- 0,025	1,73	1,66	- 0,035	4,87	4,44	- 0,215
8	0,39	0,29	- 0,05	2,05	2,42	+ 0,185	4,00	4,60	+ 0,30
9	0,21	0,30	+ 0,045	1,16	1,21	+ 0,025	3,89	3,33	- 0,28
10	0,45	0,49	+ 0,02	2,50	2,61	+ 0,055	5,25	5,66	+ 0,205
11	0,27	0,35	+ 0,04	2,41	2,84	+ 0,215	4,24	4,01	- 0,115
12	0,10	0,18	+ 0,04	0,85	0,80	- 0,025	3,58	3,78	+ 0,10
13	0,11	0,05	- 0,03	1,64	1,56	- 0,04	4,62	4,50	- 0,06
14	0,25	0,20	- 0,25	0,98	0,90	- 0,04	5,09	5,38	+ 0,145
15	0,36	0,30	- 0,03	2,39	2,61	+ 0,11	4,61	4,55	- 0,03
Totais	4,16	4,06	0,57	27,21	28,08	1,92	70,75	71,94	2,75
Médias	0,28	0,27	0,038	1,81	1,87	0,128	4,72	4,79	0,185

Erros sistemáticos

Diz-se que ocorre erro sistemático quando a flutuação dos valores determinados se dá no mesmo sentido.

A magnitude (e sinal) do erro sistemático é obtida comparando-se as análises principais com as de verificação, executadas estas últimas em laboratório independente. Uma vez determinada a magnitude e o sinal, em se tratando de um desvio (flutuação) razoavelmente pequeno, usa-se um fator de correção para atualizar as análises principais.

O laboratório independente deve ser *comprovadamente* competente, gerando resultados *acurados*. Em geral utiliza-se um número significativo de ensaios independentes, que devem ser relacionados com as faixas de teor.

Se as análises de controle do laboratório independente indicam um erro sistemático do laboratório que produzia as análises principais, usa-se um terceiro laboratório, de competência indubitável, para verificar se realmente o laboratório independente está correto, pois muitas vezes, é o laboratório que produziu as análises principais que trabalha corretamente.

Em princípio, define-se como erro sistemático a diferença entre a análise principal e a de controle, uma vez verificado que não há erro aleatório.

A verificação da existência ou não do erro sistemático, sob o ponto de vista de sua significância, pode ser feita com auxílio da estimativa conjugada de σ^2 , isto é, através da combinação de s_1^2 e s_2^2 , onde estas variâncias referem-se aos teores obtidos nas análises principal e de controle.

As análises principal e de controle são completamente independentes e para elas podemos escrever:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_c \sqrt{\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}}}$$

onde $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$ são os teores médios das análises principal e de controle, respectivamente, s_c é a raiz quadrada da variância combinada de s_1^2 e s_2^2 , que é igual a:

$$s_c^2 = \frac{(N_1 - 1)s_1^2 + (N_2 - 1)s_2^2}{(N_1 + N_2 - 1)}$$

O valor obtido para t é comparado com os valores críticos de t_p (Tabela 8.4), para dada probabilidade, com $N_1 + N_2 - 2$ graus de liberdade.

Como exemplo de aplicação, utilizaremos os dados empregados por Kreiter (1968, p. 307), em seu exemplo de erro sistemático, que reproduzimos na Tabela 8.5. De posse destes dados calcularemos t e o compararemos com o valor tabelado para $t_{5\%}$.

Os valores calculados são:

$$s_c^2 = 32,6045$$

$$s_c = 5,71$$

$$t = 1,0268$$

Tabela 8.4. Valores t_p da distribuição de Student

gl \ p	10%	5%	2,5%	1%
1	3,078	6,314	12,706	31,821
2	1,886	2,920	4,303	6,965
3	1,638	2,353	3,182	4,541
4	1,533	2,132	2,776	3,747
5	1,476	2,015	2,571	3,365
6	1,440	1,943	2,447	3,143
7	1,415	1,895	2,365	2,998
8	1,397	1,860	2,306	2,896
9	1,383	1,833	2,262	2,821
10	1,372	1,812	2,228	2,764
11	1,363	1,796	2,201	2,718
12	1,356	1,782	2,179	2,681
13	1,350	1,771	2,160	2,650
14	1,345	1,761	2,145	2,624
15	1,341	1,753	2,131	2,602
16	1,337	1,746	2,120	2,583
17	1,333	1,740	2,110	2,567
18	1,330	1,734	2,101	2,552
19	1,328	1,729	2,093	2,539
20	1,325	1,725	2,086	2,528
21	1,323	1,721	2,080	2,518
22	1,321	1,717	2,074	2,508
23	1,319	1,714	2,069	2,500
24	1,318	1,711	2,064	2,492
25	1,316	1,708	2,060	2,485
26	1,315	1,706	2,056	2,479
27	1,314	1,703	2,052	2,473
28	1,313	1,701	2,048	2,467
29	1,311	1,699	2,045	2,462
30	1,310	1,697	2,042	2,457
40	1,303	1,684	2,021	2,423
60	1,296	1,671	2,000	2,390
120	1,289	1,658	1,980	2,358
∞	1,282	1,645	1,960	2,326

Segundo Table 12, Biometrika Tables for Statisticians, Volume 1,
Second Edition, Cambridge University Press, 1962.

Tabela 8.5. Determinação do erro sistemático (dados segundo Kreiter, 1968)

Número da Amostra	Conteúdo g/t		
	Análise Principal	Análise de Controle	Diferenças
1	4,5	5,1	-0,6
2	0,8	1,9	-1,1
3	2,0	3,4	-1,4
4	3,6	4,1	-0,5
5	0,2	1,4	-1,2
6	4,5	5,6	-1,1
7	1,6	2,6	-1,0
8	2,2	3,1	-0,9
9	1,8	3,0	-1,2
10	2,4	4,2	-1,8
11	7,6	8,5	-0,9
12	1,9	2,9	-1,0
13	3,2	4,8	-1,6
14	2,6	4,3	-1,7
15	2,1	3,1	-1,0
16	9,0	10,2	-1,2
17	3,8	6,5	-2,7
18	4,7	5,9	-1,2
19	18,7	20,7	-2,0
20	5,5	7,3	-1,8
21	8,8	9,5	-0,7
22	13,8	15,0	-1,2
23	12,7	13,9	-1,2
24	7,9	9,6	-1,7
25	9,1	10,5	-1,4
26	4,1	6,8	-2,7
27	4,7	6,8	-2,1
28	5,1	6,7	-1,6
29	5,0	8,3	-3,3
30	24,4	27,2	-2,8
31	16,5	19,5	-3,0
32	6,6	8,4	-1,8
33	3,9	4,0	-0,1
34	20,5	22,4	-1,9
35	7,7	5,7	-2,0
36	2,8	3,9	-1,1
37	3,6	4,2	-0,6
38	2,0	2,7	-0,7
39	1,4	1,8	-0,4
40	0,9	1,6	-0,7
41	0,8	0,9	-0,1
42	3,7	3,8	-0,1
43	3,0	3,8	-0,8
44	3,6	4,7	-1,1
Total	255,3	310,3	55,0

	$\bar{x}$	s	s^2
Análise Principal	5,802	5,514	30,408
Análise de Controle	7,052	5,899	34,801
Diferenças	1,25	0,764	

O valor tabelado para $t_{5\%}$ é 1,667 (86 graus de liberdade); como nosso valor calculado não ultrapassa o valor indicado, as duas análises parecem não apresentar diferenças significativas.

Um modo diferente de proceder a análise estatística da questão é admitir que os dois procedimentos analíticos que originaram os dados a Tabela 8.5 são emparelhados de modo que as análises duplicatas são comparáveis, diretamente. Assim, podemos formar um intervalo de confiança para a média das diferenças entre as observações (Dixon & Massey, 1983, p. 130):

$$\bar{x}_d + t \cdot \frac{s}{N} < \mu_1 - \mu_2 < \bar{x}_d - t \cdot \frac{s_d}{\sqrt{N}}$$

onde $\bar{x}_d$ é o valor médio das diferenças e s_d o desvio padrão das mesmas; t é o valor lido na Tabela 8.4, para $N - 1$ graus de liberdade (para 95% de probabilidade, conforme adotamos). No caso em pauta, temos:

$$\bar{x}_d = 1,25 \quad sd = 0,908 \quad t_{5\%} = 1,681$$

As observações emparelhadas originam um intervalo que compreende 1,02 e 1,48.

O intervalo de confiança das diferenças é interpretável do modo seguinte, conforme Koch & Link (1970, p.157): *“em virtude do erro experimental, não se espera que os dois métodos químicos produzam o mesmo resultado. Porém, se são consistentes, não deveriam, em média, produzir resultados diferentes. Como o intervalo se estende de 1,02⁽⁴⁾ e 1,48⁽⁵⁾ e não inclui zero, conclui-se que os dois métodos não são concordantes”*. Restaria, então, utilizar um terceiro laboratório para estabelecer se o erro é do laboratório local ou do de controle.

O erro sistemático absoluto, envolvendo os dados da Tabela 8.5 é igual a $55/44 = 1,25$, enquanto o erro sistemático relativo é de $1,25/5,802.100 = 21,54\%$.

Até o momento, nossa preocupação foi a de detectar a existência de um erro sistemático, através da análise

estatística. Uma maneira um tanto diversa de saber se existe ou não erro sistemático, é através da comparação do número de desvios positivos e negativos.

Seja N o número total de amostras conjugadas ou pares de amostras, n_1 o número de pares com desvios positivo, n_2 o de pares com desvio negativo e n_3 o de pares sem desvio, isto é, com igual resultado. Em resumo, $N = n_1 + n_2 + n_3$. Como não nos interessa o valor de n_3 , podemos escrever, visando eliminar este termo:

$$\left. \begin{aligned} n'_1 &= n_1 + \frac{n_1 \cdot n_3}{n_1 + n_2} \\ n'_2 &= n_2 + \frac{n_2 \cdot n_3}{n_1 + n_2} \end{aligned} \right\} n'_1 + n'_2 = N$$

[4] [5] Nossos valores; os reportados no trabalho citado são 0,135 e 0,487.

Tabela 8.6 Valores do Argumento z da função normalizada de Laplace
para $y = 1/\sqrt{2\pi} e^{-z^2/2} [z = (x_i - \bar{x})/\sigma e y = \sigma y]$ e Área $= 1/\sqrt{2\pi} \int_0^z e^{-z^2/2} dz$

Z (+ ou -)	Ordenada	Área	Frequência (%) de desvios abaixo ou acima do valor	Frequência (%) de desvios entre desvios positivos como na 1ª coluna	Z (+ ou -)	Ordenada	Área	Frequência (%) de desvios abaixo ou acima do valor	Frequência (%) de desvios entre desvios positivos como na 1ª coluna
0,00	0,3989	--	--	--	1,85	0,0721	0,4678	3,22	93,56
0,05	0,3984	0,0199	48,01	3,98	1,90	0,0656	0,4713	2,87	94,26
0,10	0,3870	0,0398	46,02	7,96	1,95	0,0596	0,4744	2,56	94,88
0,15	0,3945	0,0596	44,04	11,92	1,96	0,0585	0,4750	2,50	95,00
0,20	0,3910	0,0793	42,07	15,86	2,00	0,0540	0,4773	2,27	95,46
0,25	0,3867	0,0987	40,13	19,74	2,05	0,0488	0,4798	2,02	95,96
0,30	0,3814	0,1179	38,21	23,58	2,10	0,0440	0,4821	1,79	96,42
0,35	0,3752	0,1368	36,32	27,36	2,15	0,0396	0,4842	1,58	96,84
0,40	0,3683	0,1554	34,46	31,08	2,20	0,0355	0,4861	1,39	97,22
0,45	0,3605	0,1736	32,64	34,72	2,25	0,0317	0,4878	1,22	97,56
0,50	0,3521	0,1915	30,85	38,30	2,30	0,0283	0,4893	1,07	97,86
0,55	0,3429	0,2088	29,12	41,76	2,33	0,0264	0,4900	1,00	98,00
0,60	0,3332	0,2258	27,42	45,15	2,35	0,0252	0,4906	0,94	98,12
0,65	0,3230	0,2422	25,78	48,44	2,40	0,0224	0,4918	0,82	98,36
0,67	0,3187	0,2500	25,00	50,00	2,45	0,0198	0,4929	0,71	98,58
0,70	0,3213	0,2580	24,20	51,60	2,50	0,0175	0,4938	0,62	98,76
0,75	0,3011	0,2734	22,66	54,68	2,55	0,0155	0,4946	0,54	98,92
0,80	0,2897	0,2881	21,19	57,62	2,58	0,0144	0,4950	0,50	99,00
0,85	0,2780	0,3023	19,77	60,46	2,60	0,0136	0,4953	0,47	99,06
0,90	0,2661	0,3159	18,41	63,18	2,65	0,0119	0,4960	0,40	99,20
0,95	0,2541	0,3289	17,11	65,78	2,70	0,0104	0,4965	0,35	99,30
1,00	0,2420	0,3413	15,87	68,26	2,75	0,0091	0,4970	0,30	99,40
1,05	0,2299	0,3531	14,69	70,62	2,80	0,0079	0,4974	0,26	99,48
1,10	0,2179	0,3643	13,57	72,86	2,85	0,0069	0,4978	0,22	99,56
1,15	0,2059	0,3749	12,51	74,98	2,90	0,0060	0,4981	0,91	99,62
1,20	0,1942	0,3849	11,51	76,98	2,95	0,0051	0,4984	0,16	99,68
1,25	0,1827	0,3944	10,56	78,88	3,00	0,0044	0,4987	0,13	99,74
1,28	0,1759	0,4000	10,00	80,00	3,09	0,0038	0,4990	0,10	99,80
1,30	0,1714	0,4032	9,68	80,64	3,10	0,0037	0,4990	0,10	99,80
1,35	0,1604	0,4115	8,85	82,30	3,20	0,0030	0,4993	0,07	99,86
1,40	0,1497	0,4192	8,08	83,84	3,29	0,0024	0,4995	0,05	99,90
1,45	0,1394	0,4265	7,35	85,30	3,30	0,0023	0,4995	0,05	99,90
1,50	0,1295	0,4332	6,68	86,64	3,40	0,0016	0,4996	0,04	99,92
1,55	0,1200	0,4394	6,06	87,88	3,50	0,0009	0,4997	0,03	99,94
1,60	0,1109	0,4452	5,48	89,04	3,60	0,0007	0,4998	0,02	99,96
1,64	0,1040	0,4500	5,00	90,00	3,70	0,0006	0,4998	0,02	99,96
1,65	0,1023	0,4505	4,95	90,10	3,80	0,0004	0,4999	0,01	99,98
1,70	0,941	0,4554	4,46	91,08	3,90	0,0002	0,4999	0,01	99,98
1,75	0,863	0,4599	4,01	91,98	4,00	0,0001	0,5000	0,00	100,00
1,80	0,990	0,4641	3,59	92,82					

Se não existe desvio sistemático, existe igual probabilidade de desvios positivos (p) e negativos (n), de modo que $p + n = 1$. Uma variável que

exibe tal comportamento se distribui de modo binominal, ou seja, tem por expressão:

$$p(s) = \binom{N}{s} p^s n^{N-s}$$

onde N é o número de eventos possíveis, s é o número de sucessos e p e n as probabilidades respectivas, iguais a 0,5 ($p + n = 1$).

Como $N.p.n$ é suficientemente grande, por exemplo, 5 ou mais, a distribuição binominal se aproxima da distribuição normal (Koch e Link, 1970, p. 205), que é o caso em pauta, pois sempre trabalhamos com um número suficientemente representativo de análises de controle. Podemos escrever:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{x - Np}{\sqrt{Npn}}$$

onde x é o número de desvios positivos (sucessos). A Tabela 8.6 nos informa que, para valores de z maiores que 2,58, existe 99% de probabilidade (área da metade da curva igual a 0,495), isto é, em 100 casos possíveis, 99 serão favoráveis em termos de existir erro sistemático, operando-se com elevado coeficiente de segurança.

Examinemos, pois, um exemplo de aplicação do que acima se apresentou. Foram realizadas 30 análises de controle de uma dada programação, com 20 apresentado desvio positivo e 10, negativo. Portanto:

$$z = \frac{20 - 30/2}{\sqrt{30 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = \frac{20 - 15}{2,7380} = 1,825$$

Não se pode afirmar que existe erro sistemático, para 95% de probabilidade.

Para os dados da Tabela 8.5, temos:

$$z = \frac{43 - 44/2}{\sqrt{44 \cdot 0,25}} = \frac{21}{3,3166} = 6,3318$$

valor maior que o tabelado e, portanto, pode ser dito que existe erro sistemático.

Em um dado esquema de controle, 92 amostras foram reanalisadas; 60 forneceram desvio positivo, 28 forneceram desvio negativo e 4 não apresentaram desvio. Assim:

$$n'_1 = 60 + \frac{60 \cdot 4}{92} = 62,608 \approx 63$$

$$n'_2 = 28 + \frac{28 \cdot 4}{92} = 29,217 \approx 29$$

e o valor de z é:

$$z = \frac{63 - 92/2}{\sqrt{92 \cdot 0,25}} = \frac{63 - 46}{6,7823} = 2,506$$

valor muito próximo do tabelado, de modo que podemos considerar, ou não, a existência de erro sistemático.

Na Figura 8.4 são registrados os dados da Tabela 8.5. Observa-se claramente que, se não existisse desvio para cada par de valores (análises principal e de controle), os pontos representados tais pares posicionar-se-iam sobre o segmento de reta diagonal aos eixos das abscissas e ordenadas. Como existem os desvios, os pontos se situam segundo uma reta de regressão que melhor se adapta aos mesmos, do tipo

$$Y = a + bX$$

Onde X é o valor da análise principal e Y é o teor da mesma, corrigida de seu erro sistemático. Os valores calculados para a (intercepto) e b (declive) são:

$$a = 0,91$$

$$b = 1,059$$

Em consequência, dados quaisquer valores de X , correspondentes às análises principais, podemos corrigi-los de seu erro sistemático. Por exemplo, as determinações abaixo relacionadas devem ser corrigidas de um erro sistemático, pois se referem à análise de regressão representada na Figura 8.4.

Conteúdo determinado (ppm)	Conteúdo corrigido (ppm)
5	6,2
10	11,5
15	16,8
20	22,1
25	27,4
30	32,7

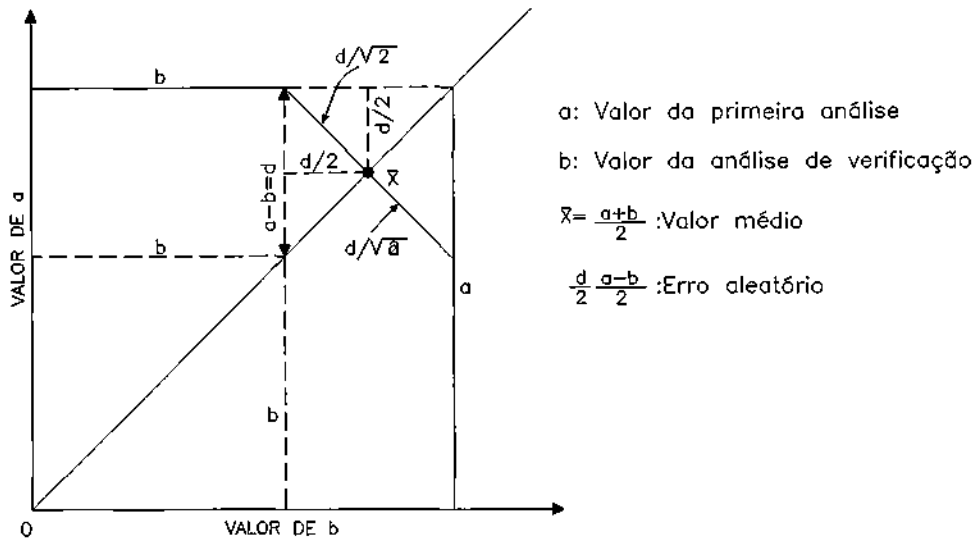


Fig. 8.3 Erro aleatório e sua representação gráfica. Segundo Grossi Sad, 1986.

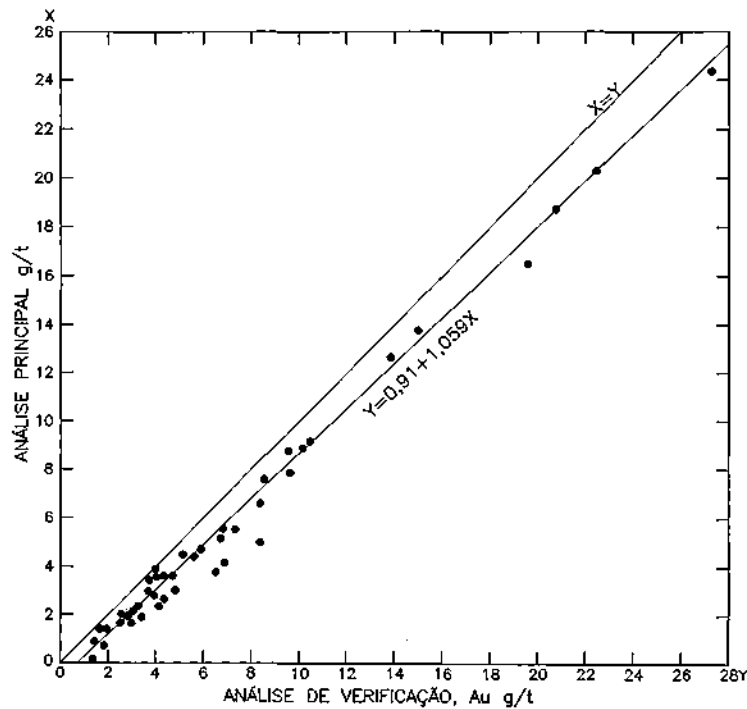


Fig. 8.4 Conteúdos em ouro de 44 amostras analisadas em duplicata, mostrando uma reta adaptada por regressão linear (dados da Tabela 8.5). Segundo Grossi Sad, 1986.

9. Uso da parametrização na delineação

Introdução a parametrização

Um dos grandes problemas existentes no planejamento mineiro é a compreensão e a determinação do **teor de rejeição ou de corte**, apesar deste “teor” ser do consenso comum. Um dos grandes contributos da Geoestatística, em sentido restrito, ou da Geomatemática, em sentido lato, é a possibilidade de definição concreta e precisa do modo de escolha do teor de corte de uma jazida mineral a lavrar, quantificando, inclusive, o que se perde ou o que se ganha, variando aquele teor e atribuindo um valor de confiança a cada teor de corte escolhido. Este importante contributo é consequência das técnicas de “parametrização”, que abordaremos em seguida.

A reserva explotável ou lavrável de uma dada jazida é dependente dos teores dos blocos que a constituem. Esta dependência é designada por **parametrização** e é sempre válida dentro de um determinado quadro tecnológico (que define a unidade explotável ou bloco de lavra) e económico (que fornece elementos para a optimização do teor de corte).

A “parametrização”, em sentido geral, de uma jazida é uma extensão prática da “Geoestatística Mineira”, que usa ferramentas matemáticas próprias, destinadas a optimizar o aproveitamento da jazida que se está a parametrizar. Esse aproveitamento ótimo não se refere apenas à definição da unidade de lavra e à determinação do teor de corte, pois atinge também a “caracterização ótima” da jazida (através do estudo da “curva característica ótima” da jazida), a escolha e afinação do(s) método(s) de beneficiamento

do(s) minério(s) da jazida, a identificação dos parâmetros influentes na lavra e no beneficiamento (que terão depois de ser “estacionarizados”), etc., etc., embora muitos destes aspectos sejam mais próprios de um detalhamento de projeto, do que de um projeto em fase de estudo básico e, muito menos de um estudo inicial, onde se delimitam jazidas..

Uma vez definido, com a aproximação necessária, o quadro tecnológico e económico válido para a parametrização que se pretende efetuar, o planejamento subsequente tem de ser feito com base em valores estimados. É evidente o impacto do método de cálculo de reservas na construção das “curvas tonelagem x teores de corte e/ou médios” e na determinação da cava final a executar, com base em uma certa “função benefício”, sujeita a diversos constrangimentos (taludes, sequência de lavra, necessidade de blendagem etc.). Uma grande vantagem adicional da consideração da “função benefício” numa parametrização, prende-se à maior facilidade de se “estacionarizar” o teor de concentrado e sua recuperação em peso, do que se “estacionarizar” o teor de minério tal-qual, visto que as variâncias daqueles são menores que as deste; isto significa que as regras de mistura são mais simples no primeiro caso do que no segundo. Em resumo, este fato é mais uma evidência mostrando que o planejamento da lavra de uma jazida deve tomar em conta os resultados obtidos no beneficiamento do respectivo minério.

A sensibilidade do planejamento mineiro posterior ao erro cometido na estimação das reservas foi analisada nos últimos tempos por diferentes métodos e concluiu-se que a

krigagem é a prática que conduz aos **riscos mínimos** (para todas as outras condições mantidas constantes). Assim, é por krigagem que se tem de estimar os teores dos blocos (ou outros parâmetros) a usar na parametrização, que fornecerá os elementos que permitem a caracterização da reserva mineral sobre as diversas óticas, considerando toda a informação que se pode extrair dos dados usados.

Teor de corte

Importância do suporte

Há cerca de 50 anos, Krige começou a pôr em dúvida os métodos de determinação do teor de rejeição ou de corte, vulgarmente aceites em todo mundo, quando demonstrou experimentalmente que **“a variância de dispersão dos teores é inferior à variância de dispersão das amostras pseudo-pontuais”**. Esta noção foi retomada em 1975 e, então, demonstrada matematicamente (tal demonstração foi importante contributo para a aceitação universal das técnicas de “parametrização”).

Em termos de histograma temos que, ao escolher determinado teor de corte Z_0 , baseado nos histogramas dos testemunhos das sondagens, com intenção de garantir determinado teor médio, efetivamente não se assegura esse teor médio, nem tão pouco a respectiva tonelagem, como se vê na Figura 9.1(A), onde D^2 tem o significado de uma variância de dispersão. Mas pode, à custa da **relação de aditividade de Krige**, conhecer-se a dispersão dos teores verdadeiros dos blocos ou painéis, desde que se conheça o variograma dos testemunhos e, portanto, D^2_{cd} .

Experimentalmente conhece-se o histograma dos testemunhos, mas, em geral, a partir dele não se pode construir o histograma dos verdadeiros teores dos blocos (só excepcionalmente temos histogramas perfeitos). O que na realidade temos é a lei de distribuição dos estimadores dos teores dos blocos Z_v^* . Pela krigagem é:

$$E[Z_v^*] = E(Z) = m$$

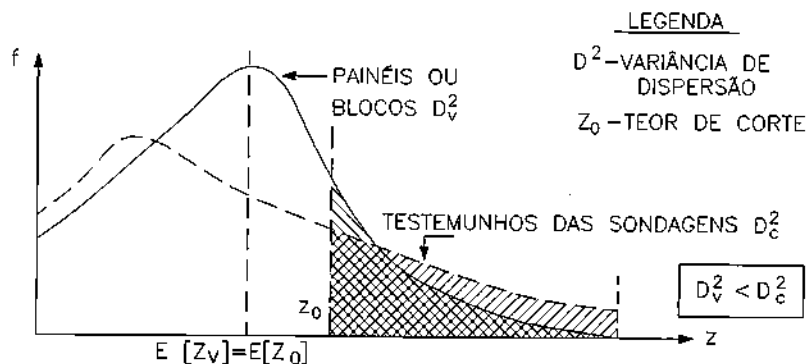
e já conhecemos as propriedades do estimador krigado.

Mas a seleção dos blocos durante a pré-lavra da jazida, é feita, ao usar-se certo teor de corte, à custa dos teores estimados (krigados) dos blocos. E, para vermos que tal seleção não garante o teor médio nem a tonelagem, retomemos os histogramas, após aplicação da relação de atenuação de krigagem, conforme a Figura 9.1(B), onde é evidente a atenuação das diferenças que a krigagem trouxe, mas essas diferenças ainda não foram anuladas, tendo apenas havido uma aproximação entre as distribuições real e estimada, como é óbvio.

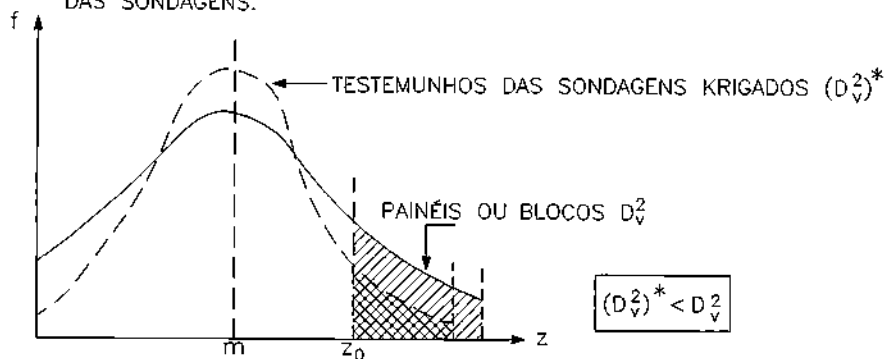
Note-se, agora, que há vários níveis de decisão para a seleção dos blocos e o último (é o efetivo) é o que opera durante a lavra (ou pré-lavra) propriamente dita da jazida. Nessa altura a informação é mais completa e os histogramas estarão conforme a Figura 9.1(C).

O que justamente procura, em Geoestatística, a parametrização, é prever a lei final condicionada sobre a qual vai incidir a decisão do explorador, ao decidir qual o teor de corte Z_0 a usar. Assim, a determinação deste teor de corte perde o conteúdo empírico e passa a ser suportado em instrumentos de decisão cujo risco pode ser conhecido, o que é muito importante, pois é evidente que nem todos os recursos geológicos detectados são susceptíveis de lavra num determinado quadro tecnológico e económico, conforme se detalhará adiante.

(A) HISTOGRAMAS DOS PAINÉIS OU BLOCOS E DOS TESTEMUNHOS DAS SONDAGENS.



(B) HISTOGRAMAS DOS PAINÉIS OU BLOCOS E DOS TESTEMUNHOS DAS SONDAGENS.



(C) HISTOGRAMAS DISPONÍVEIS AO NÍVEL DA EXPLORAÇÃO

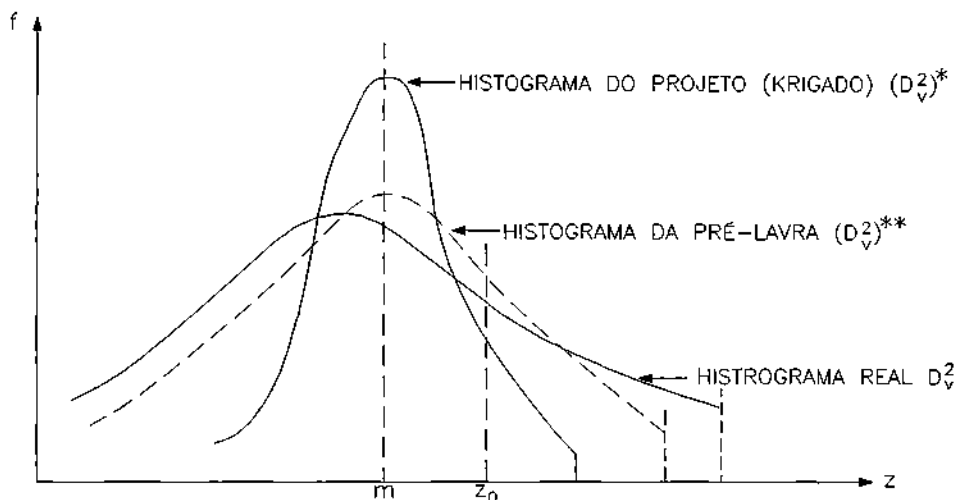


Fig. 9.1 Influência do suporte na reserva lavrável

Seleção de reservas

Os recursos revelados pelo reconhecimento geológico, estimados globalmente pelos métodos de variância de extensão ou krigagem, só muito raramente podem ser lavrados na sua totalidade.

Assim, depois da estimação local (em blocos tecnológicos) por krigagem, é necessário encarar o problema da **seleção das reservas lavráveis com uma dada tecnologia e uma certa conjuntura de mercado.**

O instrumento clássico de planeamento nesta fase de seleção é a **curva tonelagem x teor**, a qual dá a tonelagem de minério a extrair acima de um dado teor de corte. É também de grande utilidade a **curva teor médio x teor de corte** que dá o teor médio do minério retido acima de um dado teor de corte. O jogo destas duas curvas (a 1ª ligada aos custos de produção e a 2ª às receitas de venda) permite, conhecendo os rendimentos da usina de processamento e uma fórmula de benefício, otimizar o processo de lavra, definindo o teor de corte e ritmo de lavra mais convenientes para determinado objetivo (sujeitos aos constrangimentos em causa).

É necessário, no entanto, manipular criteriosamente tais curvas. De fato, já vimos que o **histograma dos teores depende do suporte onde as estimações são feitas** e uma curva tonelagem x teor, baseada sobre os testemunhos das sondagens, conduz, certamente, a previsões muito afastadas da realidade.

Assim, **depois de feita a estimação local sobre os blocos tecnológicos por krigagem**, conhecem-se os estimadores ótimos dos blocos que irão ser objeto da seleção e, portanto, a curva tonelagem x teor, construída sobre os estimadores de krigagem, **respeitando o suporte de seleção**, é sempre um instrumento de planeamento de que se deve dispor.

Na figura 9.2 estão representadas as curvas tonelagem x teor, quantidade de metal x teor e teor médio x teor de corte para uma jazida de cobre em filão, sobre painéis krigados de 70 x 70 m.

Outro aspecto importante destas curvas é que é possível estimar por krigagem o **erro** e, portanto, os intervalos de confiança com que foram calculados os estimadores.

Na Figura 9.3 está representada a curva teor médio x teor de corte para uma jazida de fosfatos brasileira, onde se pode analisar a evolução dos limites de confiança da curva com a informação suplementar (antes de realizar novas sondagens).

Nesta Figura 9.3 os limites de confiança a 95% são dados pelas curvas 0, para um número de sondagens dado. Prevendo uma nova campanha de mais 7 sondagens, os limites de confiança "apertam" para as curvas 1; com a campanha suplementar de mais 10 sondagens passam às curvas 2 (tudo ainda para o mesmo nível de probabilidade: 95%). O **risco do projeto** (dado pela probabilidade 2,5% de obter teor médio inferior ao dado pelo limite inferido de confiança) pode assim ser comparado com o custo da informação suplementar, conforme se deduz do exposto antes (a Figura 9.3 foi retirada de nota interna, não publicada, do CVRMUL, Lisboa, Portugal, 1977, intitulada "Análise de pequenos projetos mineiro-metalúrgicos").

Outro fato que é necessário ter em conta é que, no momento da seleção efetiva (aquando da lavra) se dispõe de amostras de densidade muito maior do que a malha de reconhecimento a partir da qual os blocos foram krigados.

Note-se que a krigagem, na medida em que atribui ao bloco um estimador que é uma média (apesar de ponderada pelos λ) da informação disponível, atenua a dispersão real dos teores dos blocos. Assim **um histograma de valores krigados terá variância menor do que o histograma dos valores reais**. A krigagem conduz a variâncias de dispersão $D2(v_k^* / G) < D2(v / G)$, onde G é a jazida, v_k^* os valores krigados e v os valores reais (ver a Figura 9.1 B).

É evidente que nunca haverá acesso aos valores reais v . A seleção tem de incidir sempre sobre **valores krigados**, mas é de exigir que (na medida do possível) o histograma de v_k^* se aproxime do dos valores reais.

Ora existe uma relação entre as duas variâncias de dispersão:

$$D^2(v/G) = D^2(v_k^*/G) + \bar{\sigma}_k^2$$

onde $\bar{\sigma}_k^2$ é o valor médio da variância de krigagem dos N blocos em que a jazida é discretizada.

Quanto maior for $\bar{\sigma}_k^2$, isto é, quanto mais “mal reconhecida” estiver a jazida, maior é o afastamento entre o histograma real e o dos valores krigados.

Com tanto $D^2(v/G)$ e $\bar{\sigma}_k^2$ se podem calcular formalmente (e $\bar{\sigma}_k^2$ para diferentes configurações da amostragem), pode-se prever a priori o efeito atenuador (no sentido de fazer baixar a variabilidade) da krigagem e saber qual a densidade de informação necessária para que a seleção efetuada sobre os estimadores de krigagem (de variância $D^2(v_k^*/G)$) não se afaste “muito” da seleção sobre os valores reais de variância $D^2(v/G)$.

A prática mineira aconselha que, quando

$$\frac{D^2(v/G) - D^2(v_k^*/G)}{D^2(v/G)} = \frac{\bar{\sigma}_k^2}{D^2(v/G)} > 0,1$$

é necessário informação suplementar, para que a seleção sobre os valores krigados seja próxima da real (segundo a Escola de Fontainebleau).

Mas os valores krigados z_k^* são obtidos a partir da informação disponível no momento do planejamento e já vimos que, no momento da lavra, se irá dispor de estimadores de krigagem z_k^{**} muito mais precisos (isto é com $\bar{\sigma}_k^{**2}$ menor do que $\bar{\sigma}_k^{*2}$) do que z_k^* .

Então, se for possível avaliar a densidade e geometria da informação futura, pode calcular-se $\bar{\sigma}_k^{**2}$ e estimar a variância de dispersão $D^2(v_k^{**}/G) = D^2(v/G) - \bar{\sigma}_k^{**2}$ e extrapolar o tipo de lei observado sobre os estimadores z_v^* para a nova variância $D^2(v_k^{**}/G)$.

Essa extrapolação só se poderá fazer com segurança, se $(\bar{\sigma}_k^*)^2$ não for muito superior a $(\bar{\sigma}_k^{**})^2$.

A prática mineira admite tal extrapolação quando (ainda segundo a Escola de Fontainebleau):

$$\frac{(\bar{\sigma}_k^*)^2 - (\bar{\sigma}_k^{**})^2}{(\bar{\sigma}_k^{**})^2} < 0,2$$

Se tal não acontecer, é necessário informação suplementar para julgar da estabilidade dos histogramas, antes de tentar avaliar a seleção sobre informação futura.

Importância do nível de informação

Pelo exposto, estamos cientes da importância do suporte no problema da seleção das reservas lavráveis e, também, do método de estimação usado para a obtenção dos histogramas da jazida em estudo.

Um primeiro aspecto da importância do nível de informação disponível também já foi abordado nos itens anteriores, conforme visto, por exemplo, nas figuras 9.1 e 9.3, nomeadamente, no que se refere à grandeza dos erros de krigagem (esta grandeza reflete-se no traçado dos histogramas) e ao “aperto” das curvas dos limites de confiança em torno das curvas tonelagens x teores, etc., etc..

Na seleção de reservas até aqui considerada, faz-se “reserva lavrável” todas as unidades de lavra (blocos) com teor krigado z_v^* acima do teor de corte Z_0 , independentemente da sua localização na jazida G . Na prática, isto nem sempre é possível, tudo dependendo de condições tecnológicas ainda não consideradas. Por exemplo, em lavra a céu aberto, um bloco para ser lavrado tem de estar acessível (um cone invertido de vértice neste bloco teve anteriormente de ser lavrado) e, em lavra subterrânea, um novo poço de extração só deverá ser aberto se se provar anteriormente uma quantidade global de reservas lavráveis que o justifique (um bloco só não deverá ser suficiente para tal). Assim, caminha-se passo a passo, havendo uma primeira seleção de reservas (com um determinado nível de probabilidade e um determinado erro) e depois uma segunda seleção e assim sucessivamente, sendo de admitir que entre cada um destes “passos” haja aumento de “informação”.

O nível de informação é, mais uma vez, muito importante, além de também o ter sido para o correto dimensionamento dos blocos de lavra (seu volume e sua geometria), e, independentemente dos condicionalismos

tecnológicos citados, em qualquer “passo” do nosso estudo o problema da seleção de reservas é igual: saber se o estimador do nosso bloco está abaixo ou acima do parâmetro de corte (teor, na maioria dos casos práticos). A principal questão reside ainda, em qualquer “passo” do estudo, nas relações entre variâncias, que se tornam menores com

o aumento da informação, havendo diversas relações de atenuação ou suavização teoricamente demonstradas (ver capítulo VI.A de “Mining Geostatistics”, 1978, de Journel e Huijbregts), que suportam as relações práticas da Escola de Fontainebleau apresentadas no item anterior.

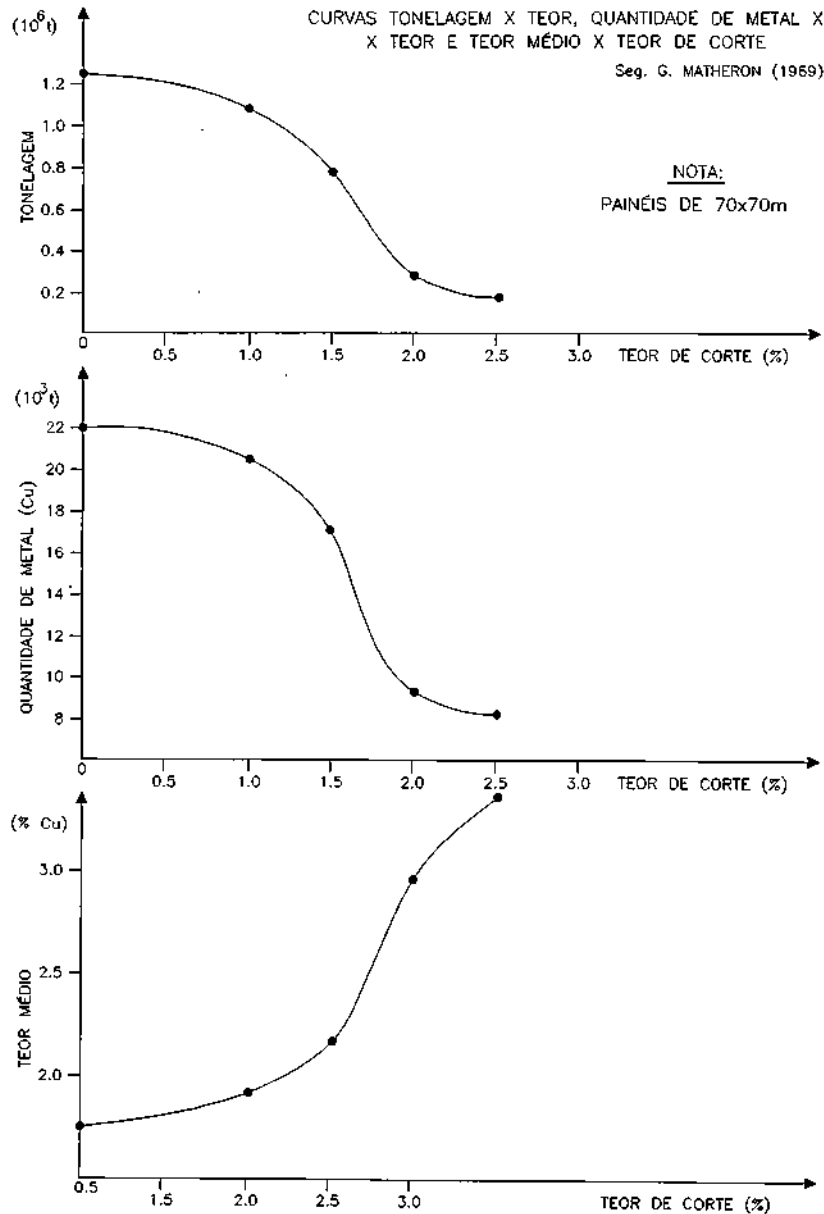


Fig. 9.2

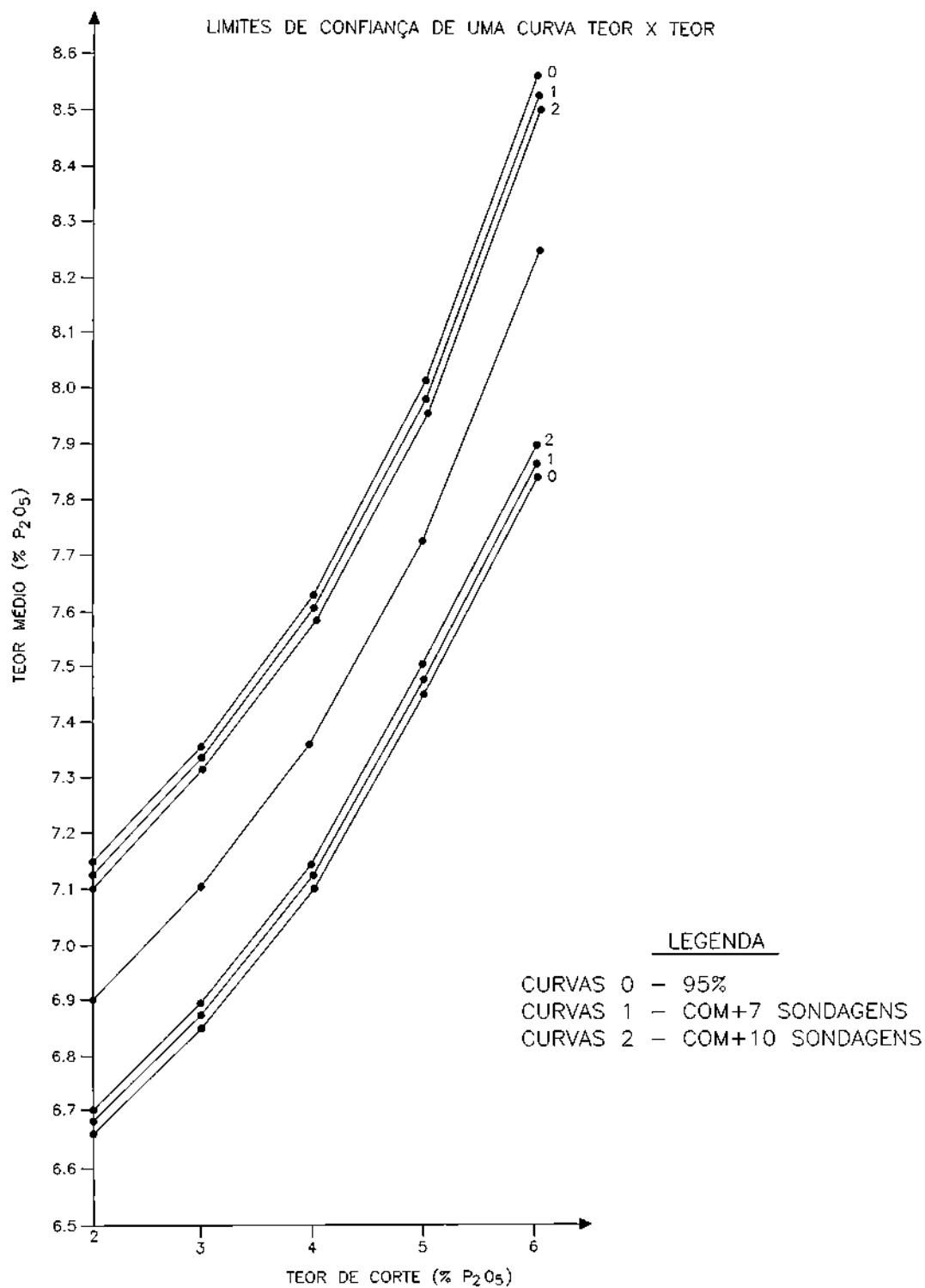


Fig. 9.3

Permanência da distribuição

Já é evidente que a estimação de reservas lavráveis requer a inferência do histograma dos estimadores z_v^{**} , que serão usados em seleção futura. Por exemplo, esta inferência é feita a partir do histograma dos Z_c obtidos dos testemunhos das sondagens ou a partir do histograma do estimadores z_v^* disponíveis na data do estudo.

Mais genericamente, temos o histograma experimental de uma variável estacionária Z , do qual temos de deduzir a distribuição de uma variável Y , que tem a mesma média mas uma variância diferente (conhecida):

$$E\{Z\} = m = E\{Y\}$$

$$\text{Var}\{Y\} \neq \text{Var}\{Z\}$$

Este problema, assim colocado, não tem solução, desde que o tipo da distribuição de Y seja desconhecido. Contudo, o problema é solúvel se se considerar que as distribuições de Y e de Z irão apresentar o mesmo “andamento”. A questão reside, então, em assegurar aquela consideração, ou seja, em fazer com que o “andamento” das distribuições de Y e Z seja o mesmo, o que se define, matematicamente, como “assegurar a permanência das distribuições de Y e Z ”, o que depende do tipo de distribuição em jogo.

Alternativas para otimização

Alternativas ao nível da lavra

Os teoremas da parametrização e seus corolários (que não abordaremos aqui e podem ser vistos em Valente, 1982), vieram contribuir fortemente para a clássica análise das quatro alternativas para otimizar o planeamento da lavra. Essas alternativas são:

- a) tratar toda a jazida, produzindo o concentrado global de menor teor;
- b) tratar toda a jazida, produzindo o concentrado global de maior teor;
- c) tratar parte da jazida por meio de um dos processos

ou condições de tratamento e a parte restante da jazida por outro processo; e

d) rejeitar parte da jazida e tratar a outra parte pelo processo que conduz ao concentrado de menor teor.

A aplicação daqueles teoremas prova que as duas primeiras alternativas, afinal, são casos particulares da 3ª alternativa, a qual é prática corrente há anos, embora não tenha tido conveniente análise até à década dos anos 70 do séc. XX.

Aqueles mesmos teoremas e suas generalizações permitiram determinar os processos de otimização sequencial, os quais se iniciarão sempre calculando, para cada transferência possível, o teor do concentrado global, até se atingir o teor mínimo desejado. Está assim assegurado a obtenção do incremento máximo do teor global do concentrado, simultaneamente com a perda mínima em metal e fica claramente definido o ponto de funcionamento do processo de tratamento otimizante, para cada bloco.

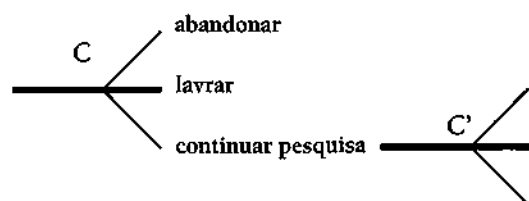
Alternativas ao nível de pesquisa geológica e dos estudos de viabilidade

Em face dos altos investimentos em jogo na indústria mineira, nenhuma decisão de lavar uma nova jazida é tomada sem se proceder antes à melhor estimação possível de todos os parâmetros geológicos, técnicos e económicos que irão condicionar a rentabilidade daquela nova mina. Estes parâmetros são numerosos e de natureza vária. Os estudos de previsão de mercado definirão fatores económicos (preços e procura). Os ensaios de beneficiamento (em bancada, em usina piloto, etc.) contribuirão para a definição da melhor solução tecnológica. Enfim, os trabalhos de reconhecimento geológico (sondagens, poços, galerias, etc.) conduzirão à estimação de reservas, em quantidades e qualidades. É sempre desejável conhecer tudo isto com grande precisão, mas a informação também custa caro e, em particular, a pesquisa geológica, usualmente, não vai ser uma parcela insignificante no investimento total de uma nova mina. Assim chega-se sempre a um momento onde o

valor (custo) da informação complementar não está mais de acordo com o valor do minério que poderá ser produzido e, entre as duas situações extremas, caracterizadas, uma pelo custo nulo da pesquisa complementar e pelo risco máximo do empreendimento, outra por uma segurança total e por um altíssimo custo de pesquisa, existem diversas situações intermediárias de compromisso, sendo uma delas a ótima.

Este problema resume-se à determinação da grandeza ótima dos trabalhos de pesquisa geológica, em cada fase do projeto (a nível de projeto básico aquela grandeza ótima será menor do que a grandeza ótima a nível de projeto detalhado, por exemplo). Na busca deste ótimo, dois parâmetros são muito importantes: o teor de corte e as taxas de produção.

Mas deve notar-se, desde já, que estes ótimos dependem das características da jazida, as quais não podem ser determinadas sem se dispor de alguma informação prévia, ou seja sem haver uma 1ª. fase de reconhecimento geológico. Enfrenta-se, portanto, um esquema seqüencial de decisões sucessivas, representáveis por verdadeiras “árvores de decisão”:



onde em cada “nó” (C, C', etc.) há que escolher entre as 3 decisões possíveis mostradas. Se se adota a 3ª. decisão (continuar pesquisando), passado algum tempo estaremos em novo “nó”, enfrentando de novo as 3 decisões possíveis, mas agora a nossa opção estará suportada em maiores informações.

No caso das 3 decisões possíveis apontadas, a escolha deve basear-se no critério habitual, que consiste em **maximizar a esperança matemática do benefício futuro**. Note-se que a 1ª. decisão conduz a uma esperança nula. A esperança da 2ª. decisão calcula-se fazendo a projeção do projeto (em termos econômico-financeiros) construído

a partir da informação disponível na data da decisão. A 3ª. decisão tem uma esperança probabilística, visto que é calculada admitindo-se determinados resultados para a complementação da pesquisa. A Geoestatística, através de tudo o que já foi apresentado aqui, fornece em cada “nó” de decisão uma medida objetiva da informação existente, na forma de variâncias e erros de estimação (de teores, de tonelagens, etc.), permitindo obter medida de “riscos” e calcular aquelas esperanças matemáticas.

Note-se ainda que o teor de corte e as taxas de produção (já referidos como sendo importantes nestas decisões) também dependem das reservas da jazida em estudo, pelo que um erro na avaliação de tonelagens e de teores conduzirá a prejuízos certos no projeto, devido à má definição de teores de corte e à má definição das taxas de produção, afastando-se tudo da situação ótima desejada. Nesta eventualidade, aqueles prejuízos também podem ser calculados e devem ser considerados na tomada de decisão sobre a continuação ou não da pesquisa geológica.

Influência do teor de corte e das taxas de produção

Definição dos parâmetros técnicos

Supõe-se aqui que as características da jazida são perfeitamente conhecidas, em particular, admite-se que se definiu sem ambigüidades o melhor método de lava e de beneficiamento da jazida. Resta a definição dos seguintes dois parâmetros tecnológicos importantes:

- a taxa de produção anual (t)
- o teor de corte a praticar (x)

O significado do teor de corte já foi apresentado: abandonam-se todos os blocos de teor médio estimado abaixo de x e lavram-se e beneficiam-se todos os blocos de teor médio estimado maior ou igual a x . A determinação deste x veio do conveniente uso das curvas de parametrização (tonelagens $\times$ teores), onde a tonelagem lavrável $T(x)$ e o teor médio lavrável $m(x)$ são funções, uma decrescente e a outra crescente, do teor de corte x (ver Figura 9.2).

Se $T(0) = T_0$ designar a tonelagem de toda a jazida, o diferencial $\frac{dT(x)}{T_0}$ representa, em percentagem da

tonelagem total, a tonelagem do minério de teor compreendido entre x e $x + dx$. Interpreta-se, por vezes, como a densidade de frequência $f(x) d(x)$ da distribuição estatística dos teores em função das tonelagens. A função $T(x)$ representa simplesmente o resultado da aplicação de um dado método de lavra e de beneficiamento, com um teor limite mínimo x , a uma jazida determinada (ou seja, a um fenómeno natural).

Recomenda-se não assimilar $\frac{T(x)}{T_0}$ à distribuição

cumulativa dos teores amostrais, por motivos óbvios (ver Figura 9.1), pois a distribuição dos teores amostrais é diferente da distribuição dos teores dos blocos de lavra, sobre os quais se tomam as decisões de lavra. A Geoestatística é o único meio de cálculo da variância da distribuição de $T(x)$ dos blocos de lavra, a partir da variância experimental das amostras.

Trabalhando-se com as referidas curvas de parametrização, a todo o teor médio m (correspondente à aplicação de um teor de corte x) está associada uma tonelagem lavrável bem determinada (que terá aquele teor m). Assim, pode-se definir:

- uma função $T(m)$ que dá a tonelagem lavrável em função do teor médio m (e não mais em função do teor de corte x)

- uma função $m(T)$ que dá o teor médio em função da tonelagem considerada lavrável.

Então, tem-se obrigatoriamente:

$$x = \frac{T(x)}{T_0} = m + \frac{d(mT)}{dT}$$

Visto que $d(mT)$ representa a tonelagem do metal dQ contido em dT (nota: a expressão anterior, em certos casos, pode ser usada para definir o teor de corte x , especialmente quando as condições de viabilidade não são as mesmas

para todos os blocos da jazida, por exemplo: um mesmo teor estimado para um bloco de lavra pode ser lavrável se se situar dentro de uma área rica e pode não ser lavrável se se situar dentro de uma área pobre da jazida). Note-se ainda que, então, **não existe um teor de corte universal**, mas a função $T(m)$ é sempre definida e, por derivação, a expressão anterior permite introduzir o parâmetro x de corte, não necessariamente constante.

A relação $m(T)$ pode, por vezes, ser representada por uma equação muito simples:

$$m = \alpha - \beta \log T$$

que é a lei de Lasky. Esta relação empírica não pode ser extrapolada para zero e para infinito, sem que se caia em contradições evidentes e perigosas. Sob o ponto de vista meramente pragmático, esta lei constitui uma excelente forma de interpolação e permite, em particular, representar o comportamento da curva $m(T)$ entre dois pontos experimentais conhecidos (diferentes de 0 e de até ∞). A expressão da lei Lasky, permite exprimir o teor de corte x de uma forma ainda mais simples:

$$x = m - \beta$$

Assim, a listagem dos parâmetros técnicos dos problemas de otimização apontados é:

- taxa anual de produção (t)
- teor de corte (x)
- tonelagem lavrável ($T(x)$)
- teor médio lavrável ($m(x)$)

sendo que as curvas de parametrização tonelagens x teores e as expressões anteriores permitem relacionar os três últimos parâmetros daquela listagem. A taxa anual de produção, tal como já foi referido, também, é muito importante nestes problemas de otimização e depende daqueles outros 3 parâmetros técnicos e, também dos parâmetros económicos que adiante serão abordados.

Definição dos parâmetros econômicos

Entre os diversos parâmetros econômicos úteis, destacam-se:

1. Preços de mercado, embora independentes da vontade do planejador, podem ser considerados como um dado de partida, suposto conhecido e constante (para simplificação aqui, mas as equações de otimização podem ser modificadas para levar em consideração mudanças nestes preços); estes preços permitem definir o valor $V(m)$ do metal recuperável contido na tonelada de minério de teor m : $V(m) = b m - b_0$ se se admitir uma relação linear como válida e onde a constante de penalização b_0 pode sempre ser reagrupada com o termo constante da expressão $p(t)$, que se definirá adiante;

2. Custos operacionais de lavra, beneficiamento, etc. que deverão ser reportados à tonelada de minério (para coerência das fórmulas), pelo que são obtidos pela divisão da totalidade das despesas anuais o pela taxa de produção t (estes custos, portanto, dependem de t); representam-se estes custos, de forma genérica, por uma função $p(t)$ que se supõe decrescente e da forma:

$$p(t) = a_0 + \frac{a_1}{t}$$

3. Investimentos totais, englobando as pesquisas geológica e tecnológica, os custos de projeto e a sua implantação, infraestrutura, etc. e que se podem representar, de forma genérica, por uma função crescente de t :

$$I(t) = C_0 + C_1 t^\gamma$$

(nota: a relação $\frac{I(t)}{t}$ é uma função decrescente de t)

onde o expoente γ , sendo positivo, é inferior ou igual a 1; para $C_0 = 0$ e $\gamma = \frac{2}{3}$, encontra-se a lei empírica, utilizada em nível mineiro industrial, que exprime o fato

dos investimentos e da capacidade de produção variarem, respectivamente, com o quadrado e o cubo da dimensão das instalações ("economia de escala").

Em resumo, consideram-se as seguintes 3 funções econômicas:

$V(m)$ = valor contido na tonelada de minério de teor m

$p(t)$ = custos operacionais da tonelada de minério

$I(t)$ = investimentos totais

É necessário introduzir um parâmetro suplementar, que é a **vida útil da mina** (N), ligado à tonelagem $T(m)$ e à taxa de produção t pela relação:

$$N = \frac{T(m)}{t}$$

O resultado da lavra em estudo, poderá então ser comodamente calculado pela expressão do **valor atualizado do benefício futuro**:

$$B_i = [V(m) - p(t)] t \frac{1 - e^{-iN}}{i} - I(t) \quad (1)$$

onde:

i – taxa de atualização

B_i – benefício futuro para a taxa i

Se $i = 0$ (caso particular importante) o benefício (não atualizado) apresenta a **expressão usual da "função benefício"**:

$$B_i = [V(m) - p(t)] T(m) - I(t) \quad (2)$$

Em qualquer caso, o benefício pode considerar-se função dos parâmetros m (teor médio, vindo do teor de corte x) e t (taxa de produção) e um critério possível para a boa escolha destes parâmetros é **maximizar aquele benefício**.

Equações de otimização

Conhecidos a função $T(x)$ e os parâmetros econômicos definidos no item anterior, o problema em estudo consiste na escolha, para o teor de corte x e para a taxa de produção anual t , dos valores x_0 e t_0 que maximizam o benefício futuro.

Uma primeira questão, que então aparece, pode ser assim descrita: deve-se procurar otimizar o benefício futuro atualizado B_t da expressão (1) (e nesse caso qual será a taxa i a ser usada?) ou deve-se procurar otimizar o benefício B não atualizado da expressão (2)? Não se entra aqui em detalhes de caráter econômico, que podem ser vistos em bibliografia de Engenharia Econômica, e apenas se salienta que o uso de uma taxa de atualização qualquer (nula ou não) não influi na comparação de projetos da mesma vida útil; mais precisamente, se se compara dois projetos para uma mesma jazida, com taxas de produção diferentes (logo, diferentes vidas úteis) é ilegítimo o uso de taxa de atualização nula; geralmente, na prática, estuda-se um grande número de condições para a lavra da jazida em pauta fixando-se o objetivo. Se o objetivo fixado for, por exemplo, a produção anual de uma tonelagem total de um dado minério e se se tiver comparando, ainda por exemplo, a lavra simultânea de n_1 blocos de lavra à taxa t_1 ou a lavra n_2 blocos à taxa t_2 ($n_1 t_1 = n_2 t_2$) é evidente que o ótimo correspondente à maximização do benefício B não atualizado definido por (2). Em conclusão: **usar-se-á a expressão (1) ou a expressão (2) conforme o caso concreto em estudo.**

Para maximizar B , devem-se anular as derivadas parciais de B em t (taxa de produção) e em x (teor de corte), tendo-se:

$$\frac{d}{dx} (V(m) T(m)) = b \cdot \frac{d}{dx} (m T(m)) = b \cdot x \cdot \frac{dT}{dx}$$

e obtendo-se o sistema:

$$\begin{cases} T \frac{dp}{dt} + \frac{dl}{dt} = 0 \\ X = \frac{p}{2b} \end{cases} \quad (3)$$

onde a primeira equação otimiza a taxa de produção (para um dado teor de corte x) e a segunda equação mostra que o teor de corte x deve ser escolhido por uma **regra marginalista** (de "margem"), que conceitua que

se lavrar toda a tonelada de minério que pague os seus custos operacionais (os investimentos serão amortizados pelos blocos ricos da jazida).

O sistema de equações (3) é facilmente resolúvel por aproximações sucessivas, em particular, se as funções $p(t)$ e $l(t)$ forem da forma exposta antes, ficará

$$t = \left(\frac{a_1 T(x)}{\gamma C_1} \right)^{\frac{1}{1+\gamma}}$$

$$x = \frac{1}{2b} \left(a_0 + \frac{a_1}{t} \right)$$

onde, para $\gamma = 1$ a primeira equação nos mostra a regra empírica generalizada que nos diz que a taxa anual de produção ideal deve ser proporcional à raiz quadrada das reservas lavráveis.

Pesquisa ótima para projeto de lavra

Generalidades

Admita-se que está provada a viabilidade de um empreendimento mineiro, nos termos anteriormente expostos, e que agora se está perante o problema de projetar a mina (lavra e beneficiamento). Os parâmetros técnicos fundamentais (teor de corte e taxa de produção anual) determinam-se pelo método descrito antes, mas, para a resolução do sistema de equações pertinentes não temos ainda a verdadeira relação tonelagem x teor, ou $T(x)$, e apenas dispomos de uma estimativa que nos dá $T_E(x)$, melhor ou pior, dependendo do nível da informação existente, tal como já se referiu.

Assim, os parâmetros t_E e x_E que serão achados, são diferentes dos valores t_0 e x_0 correspondentes ao ótimo da verdadeira função $T(x)$ desconhecida, o que significa um risco e um possível prejuízo, de probabilidade calculável, se se usar a Geoestatística convenientemente. Este risco é atenuado com pesquisa complementar, tal como já foi referido, a determinado custo, pelo que se deve procurar o compromisso ótimo pertinente, o que é feito de forma em tudo semelhante à otimização descrita no item anterior,

embora de tratamento matemático mais complexo, pelo que nos iremos restringir apenas ao **caso das jazidas “tudo ou nada”**, remetendo o leitor mais interessado para a bibliografia disponível especializada.

Caso das jazidas “tudo ou nada”

Por jazida “tudo ou nada” entende-se a jazida onde o teor não é necessariamente constante, mas onde qualquer tipo de seleção não é possível: ou se lavra toda ou não se lavra bloco algum. Este tipo de jazida é encontrado na prática mais frequentemente do que se pensa; uma jazida “tudo ou nada” não é obrigatoriamente rodeada por estéril indubitável, podendo estar rodeada por uma orla mineralizada não lavrável, geoestatisticamente heterogêneas entre si; note-se ainda a existência do “teor limite”, de conhecimento generalizado nas minas (também chamado “teor de utilização mínimo”) e que é usado para a separação do minério e do estéril nas frentes de lavra.

Neste tipo de jazida a relação tonelagem x teor não traz problema algum: tonelagem e teor são impostos pela natureza e o homem não tem escolha possível. Neste caso o erro cometido na estimação do teor médio não influi no dimensionamento: o único parâmetro técnico que há a determinar é a taxa de produção anual t , que só depende da reserva lavrável (total) existente. Assim, diferenciando a primeira equação do sistema (3), vê-se que um erro δT na estimação da tonelagem será responsável por um desvio δt entre a taxa de produção adotada e a verdadeira taxa de produção ótima; a expressão deste desvio será:

$$\delta t = - \frac{p' \delta T}{Tp'' + I''}$$

Em relação ao benefício não atualizado ótimo, esta diferença representa uma perda, que se obtém por um desenvolvimento limitado:

$$P = -\delta [(V - p) T - I] = (T p' + I') \delta t + \frac{1}{2} (Tp'' + I'') \delta t^2$$

Onde o termo de 1ª ordem é nulo, devido ao sistema

(3), visto que é vizinho do ótimo. Então, voltando à expressão de δt encontra-se:

$$P = \frac{1}{2} \frac{p'^2}{Tp'' + I''} \overline{\delta T^2}$$

Salienta-se que, em valor provável, $\overline{\delta T^2}$ dá a variância σ_T^2 da estimação da tonelagem, logo a Geoestatística também permite calcular este valor em função das características do trabalho de pesquisa e da jazida (a krigagem em branco dirá sempre, antecipadamente, o que se ganhará continuando a pesquisa desta ou daquela forma).

Em conclusão tem-se:

$$P = \frac{1}{2} \frac{p'^2}{Tp'' + I''} \sigma_T^2$$

e esta perda P deve ser comparada com o custo R dos trabalhos de pesquisa correspondente (R é função decrescente de σ_T^2), obtendo-se o volume ótimo dos trabalhos de pesquisa pela resolução da equação:

$$\frac{dR}{d\sigma_T^2} + \frac{1}{2} \frac{p'^2}{Tp'' + I''} = 0$$

que exprime que a soma $P + R$ é mínima.

Na prática, exprime-se R e σ_T^2 em função de um mesmo parâmetro (número n de sondagens, etc.) ou, eventualmente, de vários parâmetros u_i , o que significa resolver o sistema:

$$\frac{\partial R}{\partial u_i} + \frac{1}{2} \frac{p'^2}{Tp'' + I''} \frac{\partial \sigma_T^2}{\partial u_i} = 0$$

(estes parâmetros podem ser, por exemplo, o afastamento entre galerias, o afastamento entre amostras numa mesma galeria, etc.).

Exemplo de aplicação

Considere-se uma grande jazida de ferro sedimentar, de forma aproximadamente elítica, reconhecida por malha regular retangular de sondagens (sondagem em cada vértice

da malha). A Geoestatística nos diz que a variância relativa σ_r^2/T^2 da estimação da tonelagem desta jazida é a soma de dois termos, cujo desenvolvimento (deixado aqui a cargo dos interessados) conduz a:

- 1º termo:

$$\frac{0,244}{n^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{D_1 D_2}{s}}$$

que é o erro da estimação da superfície e está usando-se a terminologia da teoria transitiva:

n : número de sondagens positivas

S : área mineralizada (não convexa)

D₁ : diâmetro da jazida

D₂ : diâmetro da jazida

Sendo que para um contorno elítico se tem :

$$\sqrt{\frac{D_1 D_2}{s}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \approx 1,13$$

pelo que este 1º termo fica $\frac{0,276}{n^{\frac{3}{2}}}$;

- 2º termo da forma $\frac{A}{n}$, visto ser o erro de estimação da

possança média da jazida, onde A é constante, em 1ª aproximação (igual a 0,10); e

- a soma destes dois termos dá-nos a pretendida variância relativa:

$$\frac{\sigma_r^2}{T^2} \approx \frac{0,276}{n^{\frac{3}{2}}} + \frac{A}{n}$$

No que se refere aos parâmetros econômicos, usemos as expressões de p(t) e I(t) já apresentadas e designemos por C o custo unitário de sondagem; a soma que devemos minimizar, da perda possível e do custo de pesquisa, escreve-se, em função do número de sondagens, assim:

$$\frac{1}{4} \sqrt{a_1 C_1 T} \left[\frac{0,276}{n^{\frac{3}{2}}} + \frac{A}{n} \right] + C n$$

Anulando-se a derivada em n obtém-se:

$$\frac{1}{4} \sqrt{a_1 C_1 T} \left[\frac{0,414}{n^{\frac{5}{2}}} + \frac{A}{n^2} \right] = C$$

Numericamente, na jazida que se está a usar para exemplo, tinha-se:

T : 1000 unidades

a₁ : 3 x 10⁶

C₁ : 10

A : 0,10 (constante, em 1ª aproximação)

C : 2,000 (um por sondagem)

Tendo-se encontrado n ≈ 58 (exato: n=57,8). Ou seja, precisa-se de 58 sondagens para se ter a precisão desejada.

A decisão de parar a pesquisa geológica

Generalidades

Ao contrário do que até aqui se tem considerado, agora há que introduzir um risco econômico. Até aqui admitiu-se que estava provada a viabilidade da mina em estudo e determinou-se qual o nível de informação geológica ideal para o seu projeto, tomando em consideração apenas a possível perda por mau dimensionamento de equipamentos e instalações (por deficiente cálculo das taxas de produção); este caso foi a busca de um ótimo puramente técnico, definido sem qualquer tipo de atualização de caráter econômico.

O problema que agora se pretende resolver é a busca da resposta a uma questão essencial: **em que momento se deve parar a pesquisa e tomar uma decisão – positiva ou negativa – quanto à implantação industrial de uma mina?** Para tal, retome-se o exposto antes e a sua “árvore de decisão” e note-se que, se se optar pela 3ª decisão (continuar pesquisando), se está adiando para mais tarde um novo momento em que nova decisão tem de ser tomada, havendo as mesmas 3 decisões possíveis (só que agora com mais informação disponível), pelo menos teoricamente.

Uma nota especial deve ser apresentada sobre 2ª

decisão possível (lavar a jazida) pois esta decisão pode, na realidade, significar duas outras possibilidades: lavar imediatamente ou lavar mais tarde (após avanços tecnológicos esperados, ou após melhoria de conjuntura econômica, por exemplo). Mas note-se que, se se não atualizar o benefício, é indiferente lavar imediatamente ou mais tarde e a decisão pode ser tomada sem receio; se se atualiza o benefício, teoricamente e em 1ª aproximação, quanto mais tarde se lavar piores serão os resultados (levar-se-á mais tempo sem retorno do investimento já efetuado), salvo se se esperar um significativo abaixamento real futuro dos custos operacionais e/ou se se esperar um significativo aumento real futuro dos preços de venda do minério em pauta, visto que parâmetros como o teor de corte e a taxa de produção, dependentes das características geológicas da jazida, não deverão ter alterações sensíveis nos seus pontos ótimos com o decorrer do tempo, a menos de mudanças inesperadas; mas tudo isto pode ser quantificado com as pertinentes "análises de sensibilidade" e "análises de risco" (consultar bibliografia de engenharia econômica) que aqui não serão abordadas.

Na realidade estamos perante um problema seqüencial que está formulado de **forma descontínua**, embora se suponha sempre que a **pesquisa geológica foi exaustiva**, em qualquer momento de decisão. Mais precisamente, exemplificando, a 2ª fase de pesquisa (após se ter optado pela sua realização) poderá se centrar a malha de sondagens quadrada efetuada na 1ª fase de pesquisa, onde se tinha sondado os vértices daquela malha; em qualquer das fases se considera pesquisada a totalidade da jazida e há possibilidade de efetuar estimações de teores e tonelagens, com maior ou menor precisão, dependendo do nível da informação; é neste sentido que acima se afirmou o caráter exaustivo da pesquisa geológica, independentemente da fase de pesquisa concluída.

O problema seqüencial em pauta, descontínuo, necessita, para sua conveniente formulação, da atribuição de um valor econômico à informação suplementar possível de ser obtida pela continuação da pesquisa, valor econômico

este que considera o custo dessa pesquisa suplementar e a sua vantagem, traduzida, ou pelo aumento de precisão dos estimadores que suportarão as parametrizações decisórias, ou pela diminuição do respectivo risco.

A relação de aditividade

Suponha-se que estamos no momento de uma 1ª opção, após a 1ª fase de pesquisa geológica, para o que se dispõe de uma estimativa Z_1^* da grandeza real Z desconhecida (tonelagem ou teor). Se a decisão for continuar pesquisando, esta pesquisa complementar nunca será planejada ao acaso, mas deverá ocupar posição geométrica preferencial em relação aos trabalhos de pesquisa anteriores (usando os seus resultados).

Seja Y^* a estimativa a que os trabalhos de pesquisa da 2ª fase nos conduziria se considerados sozinhos (como se não existisse a 1ª fase) e faça-se a introdução das variâncias e covariâncias de extensão seguintes:

$$\sigma_1^2 = D^2(Z_1^* - Z)$$

$$\sigma_y^2 = D^2(Y^* - Z)$$

$$\sigma_{1,y} = E[(Z_1^* - Z)(Y^* - Z)]$$

que dependem apenas do variograma e da geometria da pesquisa. No final da 2ª fase de pesquisa, na realidade, dispõe-se (se efetivamente se efetuou essa 2ª fase) dos resultados do conjunto das duas fases, podendo construir-se o estimador Z_2^* realizando a krigagem de Z a partir de Z_1^* e de Y^* ; seja:

$$Z_2^* = \lambda Y^* + (1 - \lambda) Z_1^*$$

e seja a variância de estimativa de Z por Z_2^* :

$$D^2(Z_2^* - Z) = \lambda^2 \sigma_y^2 + 2\lambda(1 - \lambda) \sigma_{1,y} + (1 - \lambda) \sigma_1^2$$

sendo que esta variância é minimizada por:

$$\lambda = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_{1,y}}{\sigma_1^2 + \sigma_y^2 - 2\sigma_{1,y}} = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_{1,y}}{D^2(Z_1^* - Y^*)}$$

vindo então:

$$\sigma_z^2 = D^2(Z^* - Z) = \sigma_1^2 - \lambda^2 D^2(Z_1^* - Y^*)$$

introduzindo a variância:

$$D^2(Z_1^* - Z_2^*) = \lambda^2 D^2(Z_1^* - Y^*)$$

que representa o erro cometido na estimação do futuro z_2^* pelo conhecido z_1^* , fica-se com: $D^2(Z_1^* - Z_2^*) = \sigma_1^2 - \sigma_2^2$ (é uma verdadeira relação de aditividade) pelo que, a variância $D^2(Z_1^* - Z_2^*)$ representa exatamente o ganho de conhecimento trazido pela 2ª fase de pesquisa, permitindo a Geoestatística o seu cálculo sem a efetuar, conforme já visto.

Então, é suficiente encontrar o equivalente econômico daquele ganho de conhecimento para se realizar a otimização sequencial em pauta: efetuar-se-á ou não a 2ª fase de pesquisa conforme o valor econômico final da informação complementar a obter com ela (este valor considera o custo de pesquisa, etc. conforme anteriormente referido). Nos casos usuais há forte intervenção, nesta otimização, da tonelagem lavrável e dos seus teores, logicamente.

O caso onde só intervém o teor

Trata-se do caso onde a tonelagem T da jazida se considera conhecida, com precisão suficiente para que a viabilidade apenas venha a depender do teor médio desconhecido Z da jazida (trata-se de um caso muito comum). Se m_0 designar o teor limite (limite de rentabilidade e não teor de corte), tal que com $Z \geq m_0$ a jazida será lavrada e com $Z < m_0$ a jazida será abandonada, o benefício futuro (se se lavar) pode ser dado na forma:

$$B = b T (Z - m_0)$$

Designa-se agora por B_1 , B_2 e B_3 os benefícios correspondentes a cada uma das 3 decisões possíveis: abandonar a jazida (B_1), lavar a jazida imediatamente (B_2) e adiar a decisão e executar mais pesquisa (B_3). Nos dois primeiros casos ter-se-á, evidentemente:

$$E(B_1) = 0$$

$$E(B_2) = b T (z_1^* - m_0)$$

pelo que tudo se resume a lavar, ou não, conforme o resultado z_1^* conhecido seja superior, ou não, ao teor limite m_0 . O cálculo de $E(B_3)$ é mais complexo e, para simplicidade da exposição, coloquem-nos já com a 2ª fase de pesquisa concluída, onde se decidirá lavar a jazida com $z_2^* \geq m_0$, obtendo-se b T ($z_2^* - m_0$) como esperança do respectivo benefício; na mesma situação, se se verificar $z_2^* < m_0$ a jazida será definitivamente abandonada. Designa-se por

$$G(z) = P(z_2^* < z)$$

a probabilidade (avaliada antes de se efetuar a 2ª fase de pesquisa) dos trabalhos da 2ª fase de pesquisa conduzirem a um $z_2^* < z$ e designa-se por R o valor econômico final após conclusão desta 2ª fase (se realizada, mas ainda não iniciada); ter-se-á:

$$E(B_3) = b T \int_0^m (Z - m_0) dG(z) - R$$

E a comparação das 3 esperanças obtidas ($E(B_1)$, $E(B_2)$ e $E(B_3)$) permitirá, em cada passo decisório, tomar a decisão conveniente, embora a atribuição da probabilidade $G(z)$ seja um tanto quanto subjetiva (baseada em experiências similares anteriores, etc.), tal como também se pode ver na "teoria estatística da decisão", conforme Valente (1982).

Exemplo de aplicação

Trata-se de uma jazida de chumbo, zinco e prata, exaustivamente reconhecida, que evidenciou uma reserva medida de 400.000 unidades para um determinado nível de confiança. Havendo diversos metais úteis, prefere-se raciocinar diretamente com as quantidades de metal contido (e não sobre os seus teores), sendo que para uma tonelada de minério se estima o valor global de 3.000 unidades monetárias.

Considere-se que o "teor limite" provém exatamente de 3.000 unidades monetárias, logo está-se no "caso marginal" propriamente dito. Tendo em conta a incerteza futura de alguns parâmetros econômicos, decidiu-se efetuar todos os cálculos para 3 valores diferentes de m_0 , correspondentes a 2.700, 3.000 e 3.300 unidades monetárias.

O teor médio é conhecido através de um ábaco com as curvas de parametrização pertinentes e a ele se aplica $\sigma_1 = 0,15$. A 2ª fase de pesquisa, também exaustiva, será (se realizada) o apertar da malha de reconhecimento anterior, dobrando-a; o seu custo é avaliado em 40×10^6 unidades monetárias, permitindo estimar o teor médio

com $\sigma_2 = \frac{1}{2} \sigma_1$ (logicamente está-se na zona linear do

variograma, pelo que a nova variância σ_2^2 é igual a um quarto da anterior variância σ_1^2). O desvio padrão σ , da estimação m_2 a partir de m_1 , será:

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_2^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_1 \approx 0,13$$

O cálculo das esperanças pertinentes, para os 3 valores considerados, levou-nos a (em 10^6 unidades monetárias):

m_0	2.700	3.000	3.300
$E(B_1)$	0	0	0
$E(B_2)$	+ 120	0	- 120
$E(B_3)$	$136 - 40 = + 96$	$56 - 40 = + 16$	$20 - 40 = - 20$

logo:

- se o m_0 vier de 2.700 unidades monetárias, a decisão ótima é lavar imediatamente;
- se o m_0 vier de 3.000 unidades monetárias, a decisão ótima é efetuar mais pesquisa geológica; e
- Se o m_0 vier de 3.300 unidades monetárias, a decisão ótima é abandonar a jazida.

Neste exemplo achou-se uma situação geral que deve ser salientada: é exatamente na presença de um “caso marginal” que as informações a serem trazidas por pesquisa complementar têm maior interesse; esse interesse decresce rapidamente à medida que nos afastamos do “caso marginal” (corresponde ao “teor limite”) por

excesso ou por defeito; se há a certeza do teor real ser superior (ou inferior) ao “teor limite” de rentabilidade, a decisão de lavar (ou de abandonar) independe de novos trabalhos de pesquisa geológica.

Nota sobre a função benefício

Anteriormente, apesar de se aconselhar o recurso a bibliografia de Engenharia Econômica, deixou-se propositadamente em aberto a questão de se saber se o valor “benefício” deve, ou não deve, ser atualizado. Agora apresentam-se mais algumas considerações sobre este tema, embora sem detalhes.

Em economia coletivista (socialista ou não), não há interesse em atualizar benefícios, obviamente.

Em economia de livre concorrência, uma empresa deve ter o objetivo de produzir em cada ano uma certa quantidade, minimizando os seus custos operacionais reais e os seus investimentos adicionais (estes investimentos são indispensáveis, por exemplo, para a conveniente reposição das reservas lavradas, sob pena da empresa caminhar para a sua exaustão); perante este objetivo, não há como deixar de usar benefícios atualizados em todas as otimizações necessárias, nomeadamente na elaboração dos programas de produção de longo, médio e curto prazos. Neste tipo de economia, no início do empreendimento, procura-se um critério de decisão quanto ao arranque da implantação da mina, e, em face das regras da livre concorrência, aquela implantação só se dará se o valor atualizado do benefício futuro for francamente positivo, pelo que se usará a expressão (1) para uma taxa i não nula; note-se que é fácil passar para o caso de $i = 0$ por substituição, nos resultados obtidos, das exponenciais e^{-iN} pela unidade e das expressões

$$\frac{1 - e^{-iN}}{i} \text{ por } N.$$

Ainda no caso de economia de livre concorrência,

os economistas, logicamente, atribuem então grande importância à fixação daquelas taxas de atualização i , o que é feito em função de critérios próprios. No caso particular puramente capitalista, há sempre o objetivo de maximizar os lucros, o que significa efetuar todas as otimizações até aqui abordadas e mais uma: maximizar a relação B_1/I . Para maiores detalhes continua-se a remeter os interessados para a bibliografia especializada.

A parametrização de uma jazida

Característica ótima de uma jazida

O que atrás se referiu sobre a alocação otimizada permite construir diretamente a **característica ótima** de determinada jazida, isto é, a relação que maximiza o peso global de metal recuperado para se obter dado peso de concentrado. É evidente, que esta característica se relaciona com o desenvolvimento tecnológico e, portanto, variará com o tempo. Trata-se, assim, também, de uma verdadeira "curva de Lasky".

Considere-se, então, o espaço $T \times M \subset R^2$, a que chamaremos "espaço das configurações mineralúrgicas", onde a jazida tal-qual é representada por um ponto $P_0 (T_0, M_0)$, com T_0 esperança do teor médio da jazida e M_0 esperança do peso total de metal contido. Convencionalmente, poderá denominar-se a configuração definida por P_0 como a de nível T_0 , conforme a Figura 9.4.

E vamos supor que o mercado exige o minério em questão com o teor T e para se transitar de T_0 para T podemos usar várias "políticas", a que corresponderão outros tantos trajetos no espaço representado. O trajeto ideal é o paralelo ao eixo dos T , mas está provado que é impossível trabalhar qualquer jazida obtendo concentrados de teor $T > T_0$ sem perda em metal (questão tratada por R. Tillé em 1972 e retomada, posteriormente, nos trabalhos de parametrização de J. Q. Rogado). Os trajetos reais serão como as curvas I, II, III representadas e a que correspondem

perdas em metal ΔM_I , ΔM_{II} e ΔM_{III} respectivamente, pois é óbvio que a processos de concentração distintos corresponderão trajetórias diferentes, sendo um processo tanto mais adequado quanto menor for a perda ΔM correspondente (quanto menor for ΔM , mais a respectiva curva se aproximará do trajeto ideal paralelo ao eixo dos T).

Por outro lado, escolhido o processo de concentração, tem de passar-se à regulação do mesmo, regulação essa que pode fazer-se variar de bloco para bloco com vantagem, como se mostrou já. A regulação ótima será aquela a que corresponder o trajeto que constantemente tiver **maior tangente em valor absoluto**.

Portanto, o problema traduz-se em minimizar a funcional:

$$\Delta M = \int_{T_0}^T \frac{dM}{dT} dT = \int_{T_0}^T f(T) dT$$

o que corresponde a maximizar (usando uma das políticas admissíveis):

$$I = \int_{T_0}^T |f^{-1}(T)| dT = \int_{T_0}^T \left| \frac{dT}{dM} \right| dT$$

Encontrado o trajeto ótimo para se alcançar T , o **princípio da otimalidade de Bellman** prova que esse é também o trajeto ótimo para se obter qualquer T' (com $T_0 < T' < T$), o que quer dizer que o trajeto ótimo exprime a relação $M(T)$ ótima também (visto que a função objetivo M é markoviana (integral de Stieltjes)). E como a cada par $\{M, T\}$ corresponde um par $\{C, T\}$, eliminando T obter-se-á a **relação $M(C)$ ótima, a qual é a característica ótima da jazida** (trata-se de uma curva que define a melhor solução tecnológica para a jazida). Cada ponto desta curva representa uma configuração dos blocos em que se descreveu a jazida e o quociente $\frac{M}{C}$ define o teor do concentrado obtido com essa configuração. Demonstra-se (Rogado, 1977) ainda que em cada ponto (M, C) , a **relação $\zeta = \frac{dM}{dC}$ tem o significado de um verdadeiro teor de corte**, visto que se se supuser que só se aproveita o concentrado de peso C (ou o metal M), todos os blocos de teor de concentrado inferior a ζ são rejeitados.

Curva característica ótima de uma parametrização

A curva citada no final do item anterior é a chamada “curva característica ótima da jazida” e trata-se, como se referiu já, de uma curva do tipo das de Lasky, que define a melhor solução tecnológica para enquadrar a lavra e o beneficiamento da jazida.

Obtida a curva característica ótima pode parametrizar-se a jazida à custa de algum critério considerado relevante. Normalmente, escolhe-se o critério de maximizar a margem monetária global CIF:

Essa margem é definida por (não atualizada):

$$B = Mv - (tC + m + \ell)$$

onde:

t: custo dos transportes (frete) por unidade de peso concentrado;

m: custo operacional da lavra = despesa global (preparação, desmonte, transporte interno, etc.); e

ℓ : custo operacional do tratamento (também despesa global).

Para cada par $\{t, v\}$ existe um limite superior para $m + \ell$, porque a margem B , usando como unidade monetária o valor pró-rata da unidade de metal, é:

$$\frac{B}{v} = M - \left(\frac{t}{v} C + \frac{m + \ell}{v} \right) = M - L$$

onde L é a reta de equação

$$L = \frac{t}{v} C + \frac{m + \ell}{v}$$

logo, $m + \ell$ máximo corresponde ao traço, no eixo do M , da tangente à curva característica de coeficiente angular $\frac{t}{v}$, conforme a Figura 9.5 (parametrização a três fatores).

Note-se que $m + \ell$ fixa-se estabelecendo a escala de extração de minério tal-qual; nesta soma se inclui, não só os custos diretos e indiretos, mas também as despesas gerais, o investimento, etc.

Haverá, assim, uma dimensão do empreendimento para a qual não existe margem positiva, essa dimensão depende da cotação do metal no mercado e dos fretes a pagar. Para $m + \ell$ inferior ao máximo (escala maior de produção) a margem monetária máxima correspondente ao ponto de

$M(C)$ cuja tangente tem $\frac{t}{v}$ como coeficiente angular. Para $\frac{t}{v}$ decrescente as margens monetárias máximas correspondem a teores globais do concentrado decrescentes e a rendimentos em peso e em metal crescentes.

Esta mesma análise pode desenvolver-se em termos de margens atualizadas, sem perda de generalidade e só por simplicidade não o fizemos.

As curvas de parametrização tonelagem de concentrados x teor de corte, etc. podem ser construídas variando $m + \ell$ ou $\frac{t}{v}$ ou os dois parâmetros simultaneamente. Assim, a característica ótima faculta a parametrização e introduz vários conceitos de teor de corte. A escolha do teor de corte é, então, bem fundamentada e precisa, graças às técnicas da parametrização, que levaram ao que hoje é chamado de “prática das rejeições”, muito bem tratada por Rogão (1977).

A prática das rejeições

Na sequência do exposto, importa notar três aspectos fundamentais da aplicação do teor de corte, a saber:

1) As considerações efetuadas, quando aplicadas à **totalidade da jazida**, carecem de realismo, porquanto o que dizem é que, se aquela fosse lavrada com determinado critério de seleção, o teor médio global seria aquele que resultaria da análise feita. Mas nada informam da evolução desse teor ao longo da vida da mina. São, por isso, para efeitos práticos, tais considerações significativas apenas para painéis ou zonas relativamente limitadas do depósito em lavra;

2) E se assim é, há que colocar a questão: feita uma partição macroscópica da jazida (por painéis ou zonas) sujeita, na maioria dos casos, a regras sequenciais de lavra,

nada garante que várias vezes o teor de corte não tenha de ser alterado consideravelmente para garantir o teor médio exigido, ou à entrada ou à saída do concentrador. Esta situação, pode, por vezes, mitigar-se, mercê da utilização apropriada do planeamento e da programação; e

3) Na realidade, o que interessa é que o teor médio do concentrado (se é o concentrado que se vende e não o "tal-qual") tenha valor determinado no volume do lote que o comprador controla, isto é, a rejeição pelo teor (seja ele do "tal-qual", seja do concentrado) não se pode tornar independente dos parques ("stocks") antes e depois do concentrador e da dimensão da unidade básica comerciável (caminhão, trem ou navio), sobre o qual é realizado o controle de qualidade.

Estas conclusões levaram a desenvolver práticas do desmonte que implicam em uma combinatória

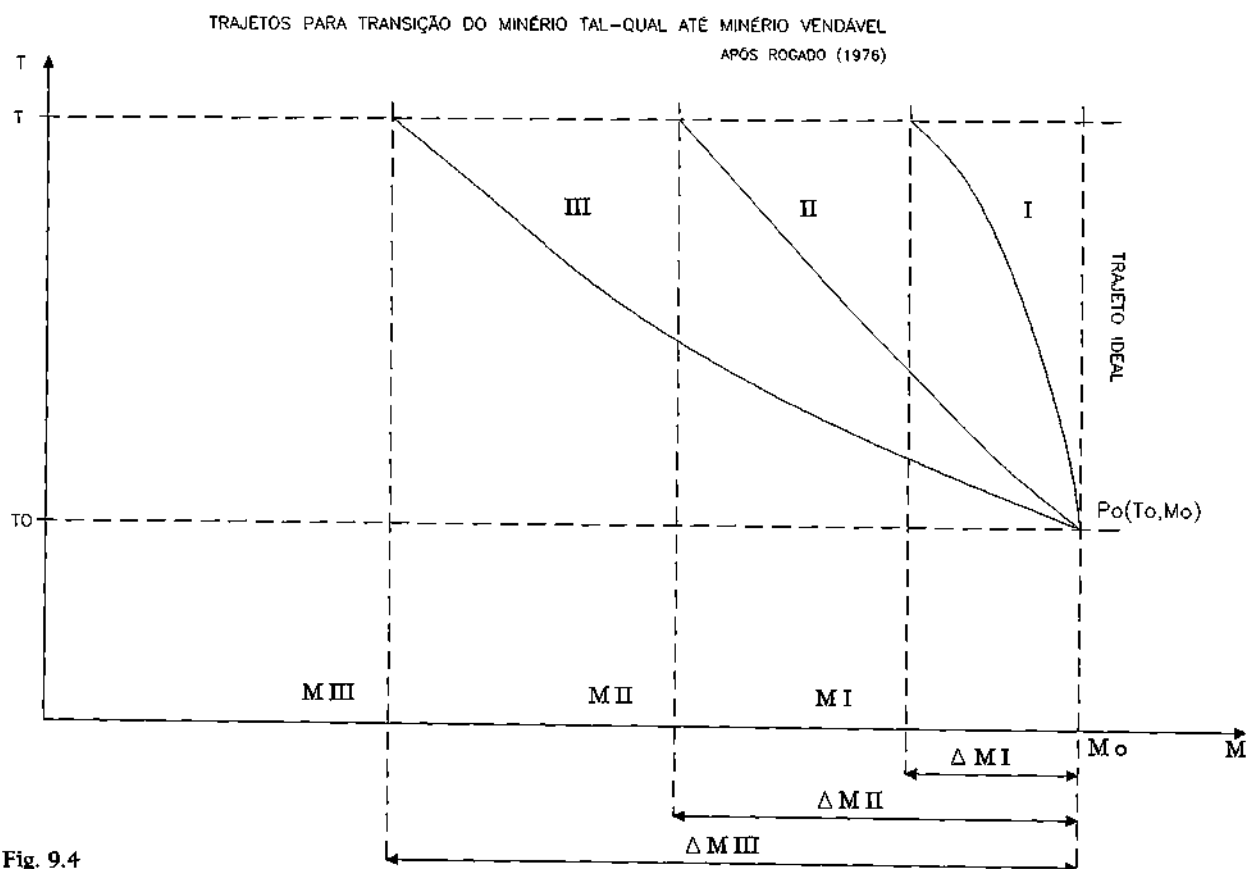


Fig. 9.4

CURVA CARACTERÍSTICA OPTIMAL DE UMA PARAMETRIZAÇÃO A TRÊS FATORES
APÓS ROGADO (1976)

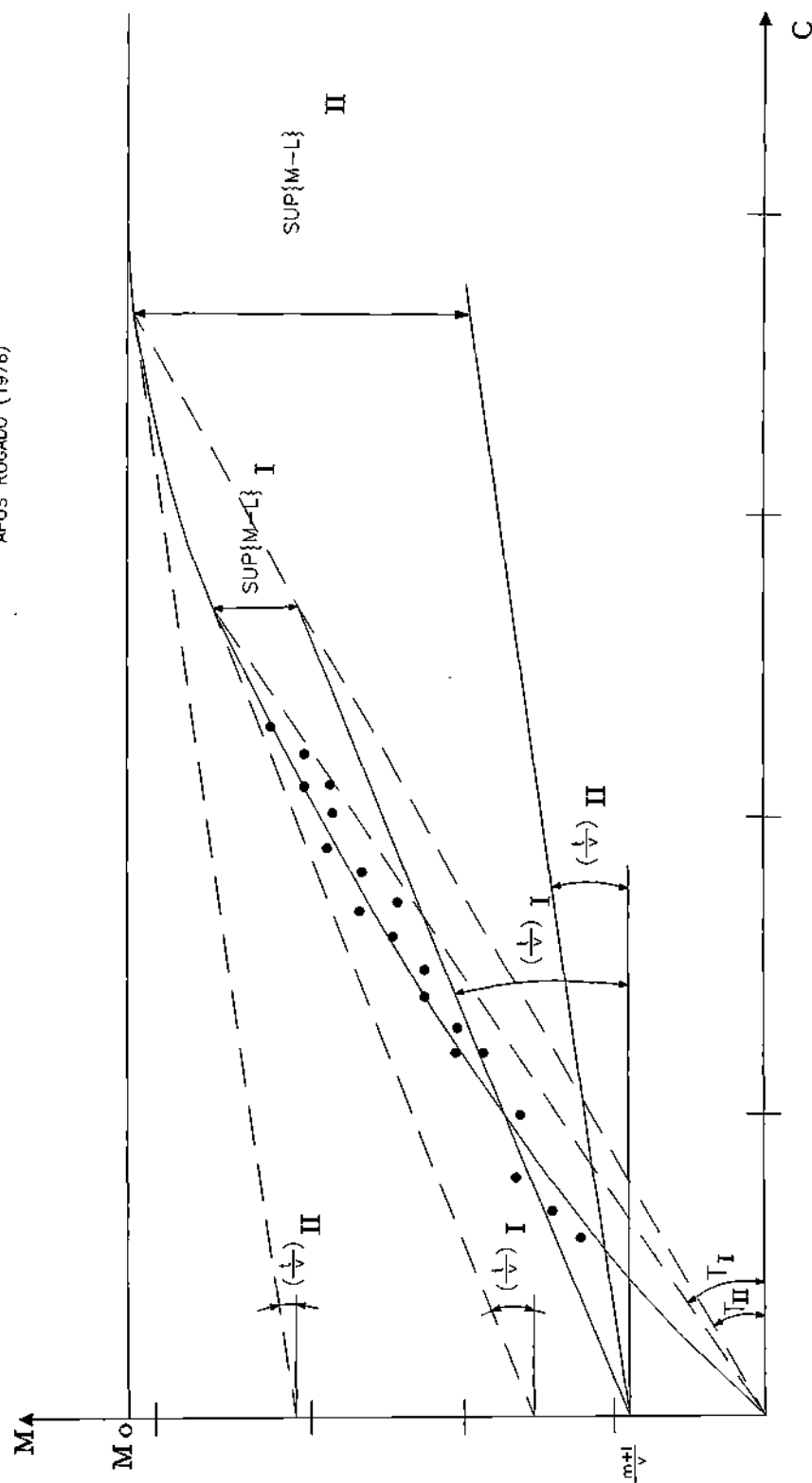


Fig. 9.5

(blendagem) e é nessa ótica que efetivamente a rejeição por teor se pratica ao nível da produção de um desmonte, constrangida pelo objetivo de utilizar de forma estacionária, ou quase estacionária, os meios de trabalho alocados ao grupo de painéis ou zonas em que macroscopicamente se dividiu a jazida. Este é o objetivo da **Estacionarização de Parâmetros**, tecnologia e metodologia de lavra cuja descrição foge aos objetivos do presente texto.

Análise de risco na pesquisa geológica

Notas prévias

Nos primeiros estágios de planejamento de uma nova mina, o erro na estimação das reservas deve ser um dos importantes fatores a considerar. Como este erro só pode ser computado por métodos de estimação geoestatísticos, o risco do projeto pode ser calculado e referido a diversas malhas de pesquisa da jazida, bem como relacionado a outras condições econômicas assumidas e/ou consideradas prováveis.

Estas observações já foram introduzidas em diversos anteriores, pelo que a sua conceituação básica de suporte (sobre erros de estimação, sobre as técnicas de krigagem em branco, etc.) não será aqui repetida. Aborda-se-á, apenas, um aspecto prático de sua aplicação.

Um interessante caso de aplicação está relatado por L. Cortêz, F. Muge e H. Pereira, na sua comunicação "Mine Planning in a Phosphate Deposit" ao 15th APCOM (Austrália, 1977), e refere-se ao depósito de Catalão (Goiás, Brasil), parametrizado (depois de variografado e krigado) em Lisboa; as suas curvas tonelagens x teores e os seus intervalos de confiança foram relacionados com uma função objetivo econômica (tipo "função benefício") para 3 malhas de pesquisa diferentes e as decisões foram tomadas em cima de custos e valores de possível informação suplementar. O que se expõe em seguida pode considerar-se como sendo um resumo da comunicação ao 15th APCOM referida.

Informação para análise

Usando uma informação vinda de 134 sondagens, a jazida foi devidamente variografada, krigada e parametrizada. A sua estimação por krigagem, e conseqüente parametrização, foi efetuada para blocos de 50m x 50m x 10m devidamente orientados, tendo-se adotado o nível de 95% de probabilidade e provado a normalidade das distribuições.

Para a aplicação em pauta foi, depois, selecionada uma área de 445 blocos, onde havia a permanência das distribuições e cuja curva de parametrização tonelagem x teor de corte se representa na Figura 9.6(A). Na Figura 9.6 (B) é representada, para a mesma área de 445 blocos, a curva de parametrização teor médio x teor de corte, incluindo os seus intervalos com 95% de confiança. Todos os detalhes de cálculo, desde a análise estrutural por variografia até à obtenção destas curvas de parametrização e suas aplicações podem ser vistas na comunicação referida.

Em tudo o que se expõe considera-se que não há erro na densidade do minério, ou seja, o número de blocos com teor superior a um dado teor de corte é proporcional à sua tonelagem e nenhum intervalo de confiança é, então, plotado na curva da Figura 9.6(A).

Para a mesma área de 445 blocos simulou-se, primeiro, uma campanha de pesquisa de 7 sondagens adicionais de 30 metros cada (o mesmo comprimento médio das sondagens já existentes na área) e, depois, uma segunda campanha de pesquisa de mais 10 sondagens adicionais também de 30 metros cada. Todas as sondagens simuladas foram devidamente localizadas, isto é, a sua implantação não foi aleatória.

Como as variâncias de krigagem dependem só do variograma (já conhecido) e da geometria das amostras usadas para a estimação do teor de cada bloco (como já se sabe pelo exposto sobre a krigagem em branco), os autores da comunicação referida calcularam todas as variâncias envolvidas e detalharam a curva de parametrização teor

médio x teor de corte para o seu intervalo "interessante" (teores de corte entre 2% e 6% P_2O_5), plotando também os intervalos daquela curva para os 3 casos em comparação (informação inicial, 1ª campanha adicional e 2ª campanha adicional) para o mesmo limite de confiança (95%). Tudo isto está representado na Figura 9.6(C).

Assim, para um certo teor de corte, aceita-se um risco de 2,5% de produção de minério com um teor médio inferior a

$$\bar{Z} - \frac{2\bar{\sigma}_K}{\sqrt{n}}$$

sendo $\bar{Z}$ o teor médio desejado (estimado por krigagem, como todos os teores usados para a parametrização), $\bar{\sigma}_K^2$ o valor médio da variância de krigagem e n o número de blocos em consideração.

As conclusões que se podem retirar da análise do exposto anteriormente e do mostrado na Figura 9.6(C) já foram detalhadas antes (sobre seleção de reservas). Tudo isto é a informação que suportará a análise de risco que adiante se abordará.

A análise de risco

Assumindo um modelo linear simples para a função econômica que relacione a tonelagem com o teor médio, o benefício global P de todos os blocos lavrados pode ser assim descrito:

$$P = T(t_m v - C)$$

onde:

T – tonelagem dos blocos lavrados;

t_m – teor médio dos blocos lavrados;

v – preço de venda de 1 tonelada de produto, devidamente corrigida pela recuperação na usina de concentração, etc.; e

C – custos de uma tonelada de minério (supostos constantes, em 1ª aproximação).

Note-se que T está relacionado com o teor de corte pela curva da Figura 9.5-A e t_m está relacionado com o

mesmo teor de corte pela curva da Figura 9.5-B.

Considerando o risco de 2,5%, o benefício mínimo esperado para um certo teor de corte pode ser calculado da expressão de P anterior usando o pior intervalo de confiança (a curva 0 da Fig. 9.5 (C)), ou seja, assumindo um $2\bar{\sigma}_K / \sqrt{n}$. Então, há 2,5% de probabilidade de se obter um benefício inferior a:

$$PM = T [(t_m - 2\bar{\sigma}_K / \sqrt{n}) v - C]$$

Se se implantar a 1ª campanha de pesquisa adicional, com um custo S_1 , o ganho em precisão na estimação daquele P pode ser comparado, visto que ter-se-á:

$$P_{M_1} = T [(t_m - 2\bar{\sigma}_{K_1} / \sqrt{n}) v - C] - S_1$$

e, igualmente para a possível implantação da 2ª campanha de pesquisa adicional, para a qual se terá a um custo S_2 :

$$P_{M_2} = T [(t_m - 2\bar{\sigma}_{K_2} / \sqrt{n}) v - C] - S_1 - S_2$$

Assim, ΔP_{M_1} é o incremento do benefício mínimo (com o risco de 2,5%) esperado pela implantação daquela 1ª campanha:

$$\Delta P_{M_1} = P_{M_1} - P_M = T \left(\frac{2\bar{\sigma}_K}{\sqrt{n}} - \frac{2\bar{\sigma}_{K_1}}{\sqrt{n}} \right) v - S_1$$

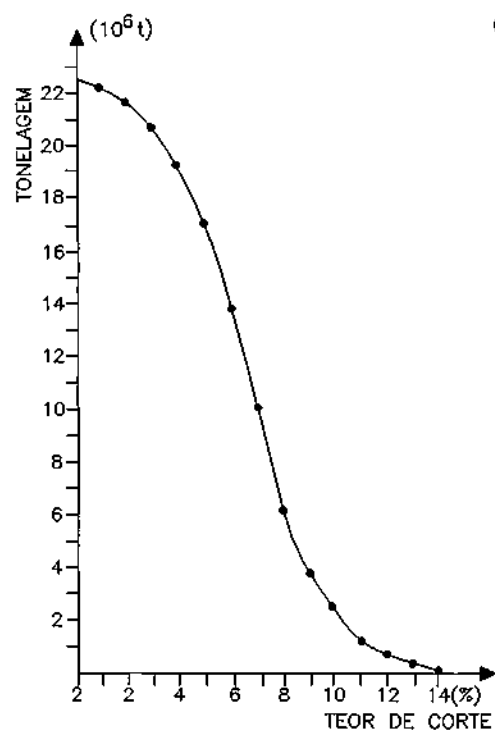
e se $\Delta P_{M_1} > 0$, conclui-se que será interessante, para as condições do caso, efetuar aquela 1ª campanha de pesquisa adicional.

Simplificadamente, ΔP_{M_2} pode ser assim expresso:

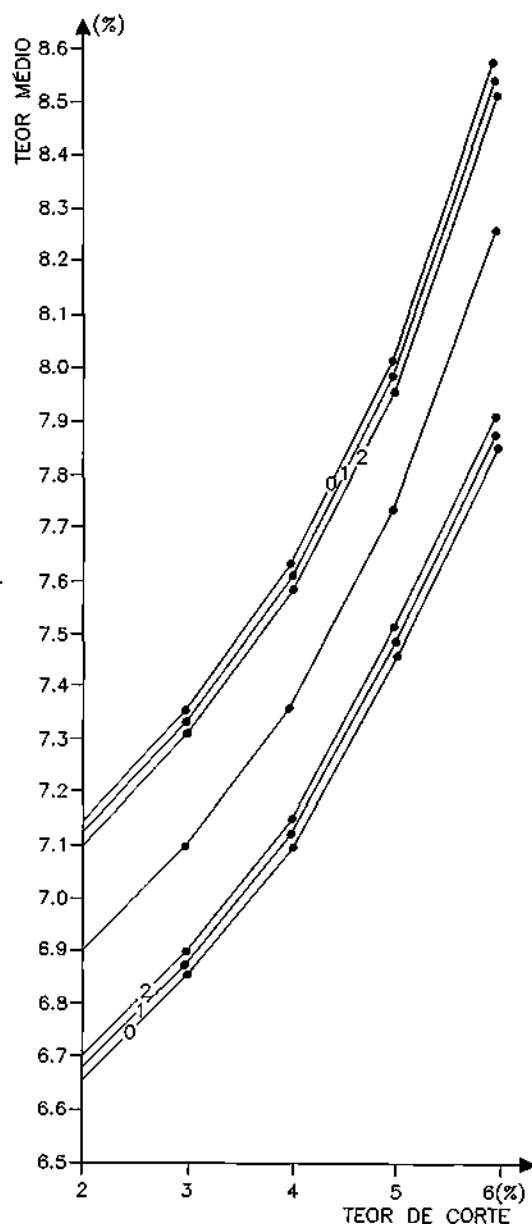
$$\Delta P_{M_2} = P_{M_2} - P_M = T \left(\frac{2\bar{\sigma}_{K_1}}{\sqrt{n}} - \frac{2\bar{\sigma}_{K_2}}{\sqrt{n}} \right) v - S_2$$

e este ΔP_{M_2} mede o interesse da realização da 2ª campanha de pesquisa adicional comparado com o da 1ª campanha.

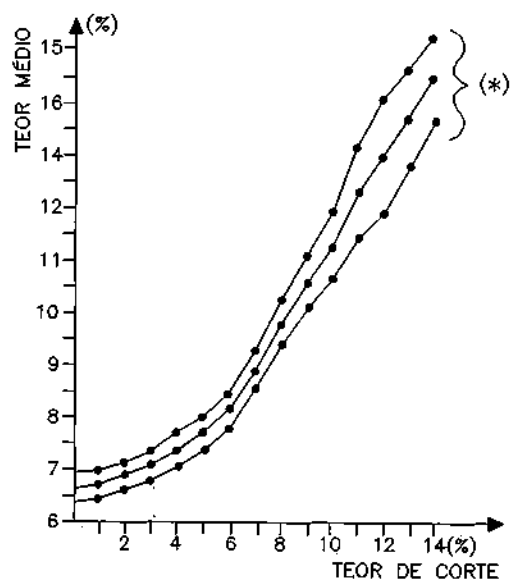
(A)–CURVA TONELAGEM x TEOR DE CORTE



(C)–PORMENOR DE (B) PARA DIFERENTES MALHAS DE PESQUISA



(B)–CURVA TEOR MÉDIO x TEOR CORTE



(*) INTERVALO PARA 95% DE CONFIANÇA

(0)–INTERVALO* COM A INFORMAÇÃO INICIAL

(1)–INTERVALO* COM A 1ª CAMPANHA ADICIONAL

(1)–INTERVALO* COM A 2ª CAMPANHA ADICIONAL

Fig. 9.6 Curvas de parametrização para análise de risco

Para o caso concreto relatado por Cortéz, Muge e Pereira no 15th APCOM, o desenvolvimento e a aplicação destes raciocínios levaram a:

Teor de corte (%)	Tonelagem lavrável	$\frac{2\bar{\sigma}_K}{\sqrt{n}}$	$\frac{2\bar{\sigma}_{K_1}}{\sqrt{n}}$	Δ P_{M_1}	$\frac{2\bar{\sigma}_{K_1}}{\sqrt{n}}$	$\frac{2\bar{\sigma}_{K_2}}{\sqrt{n}}$	Δ P_{M_2}
2	21.665	2,18	36,73	2,35	38,91		
3	20.665	2,33	37,63	2,36	36,75		
4	19.241	2,85	44,34	2,31	32,45		
5	17.019	3,04	41,24	2,62	32,59		
6	13.787	3,15	32,93	2,97	28,95		

Os resultados desta tabela, embora por motivos óbvios multiplicados por uma constante, servem para se retirarem as conclusões pretendidas sobre a realização ou não das campanhas de pesquisa adicional, que deverão, à primeira vista, serem interessantes (todos os ΔP_M são positivos), embora se prefira uma ou outra conforme o teor de corte que se vier a praticar. Registre-se que não houve preocupações de otimização, pois houve apenas preocupação de comparação de precisão de resultados, pelo que o exemplo dado talvez seja um pouco empírico, mas parece um bom exemplo para uso em decisões do tipo passo a passo, comuns nas fases iniciais de um projeto.

10. Uso da tipologia na delineação

Tipologia e análise grupal

Generalidades

A “tipologia” de um minério, normalmente, tem por objetivo primeiro a obtenção de grupos de amostras com características e volumes adequados à realização de ensaios de caracterização e/ou de beneficiamento. O estabelecimento de uma “tipologia” torna-se indispensável sempre que numa jazida são detectados tipos de minério que, por suas diferentes características tecnológicas, podem vir a constituir sub-divisões do depósito mineral, as quais deverão ser delineadas e poderão ter de ser submetidas a diferentes processos de beneficiamento.

A técnica mais corrente para a determinação da referida “tipologia” é a denominada Análise Grupal (*Cluster Analysis*), que permite o agrupamento de amostras segundo graus de dissimilaridade crescente, medidos a partir dos valores assumidos pelas variáveis consideradas importantes para o agrupamento (teores, etc.). A escolha destas variáveis deve ser cuidadosa (o cuidado é justificável porque nesta técnica os “tipos” de minério a serem determinados serão funções unicamente das mesmas variáveis) e a “dissimilaridade” é a denominação dada às “distâncias” que separam as amostras, quando caracterizadas pelos valores tomados pelas variáveis escolhidas. Assim, as “distribuições espaciais” podem ser investigadas e, quando os grupos formados constituem regiões bem definidas do depósito mineral, a análise grupal torna-se a base para um planejamento da distribuição espacial dos pontos de amostragem.

Quando existe apenas uma variável caracterizante o agrupamento torna-se fácil. Entretanto, quando as amostras ou elementos disponíveis à formação de grupos são caracterizados por muitas variáveis, a formação dos mesmos só é possível se contarmos com um método adequado. Este método deve ter um critério objetivo e único na comparação das amostras, permitindo uma análise também objetiva dos grupos formados. Além disto, o tempo necessário à execução do serviço deve ser curto, viabilizando o estudo dentro de um cronograma de projeto.

A “*Cluster Analysis*”, como método que atende a estes pré-requisitos, foi inicialmente desenvolvida para a Psicologia e, então, aplicada a Taxonomia e Paleontologia, como “um método de se classificar ou agrupar os membros de uma mesma espécie contidos em uma coleção inicial de membros de espécies diferentes, considerando-se as peculiaridades características de cada elemento”, conforme P.L. Collier (1975).

Metodologia

Basicamente, a metodologia da “*Cluster Analysis*” consta de: “dados N elementos, caracterizados cada um por M variáveis, compara-se todos os elementos dois a dois”, conforme síntese de J.M. Parks (1966).

Esta comparação é feita através do operador:

$$D_{j,k} = \sqrt{\sum_{i=1}^M \frac{(x_{i,j} - x_{i,k})^2}{M}}$$

onde:

$D_{j,k}$ = dissimilaridade entre os elementos j e k

$x_{i,j}$ = valor normalizado da variável i , referente ao elemento j

M = número de variáveis usadas

i = ordem da variável sob consideração

j, k = ordem dos elementos sob consideração

Sendo M o número de parâmetros que caracterizam cada elemento, N o número total de elementos a serem agrupados e $X_{m,n}$ os valores destes parâmetros, com n variando de 1 a N e m de 1 a M , a normalização do parâmetro de ordem M_0 se faz comparando os valores $X_{M_0,n}$ com n variando de 1 a N . Aos máximos e mínimos $X_{M_0,n}$ encontrados, atribuímos os valores 1 (um) e zero respectivamente, sendo que os demais $X_{M_0,n}$ compreendidos entre o máximo e mínimo, têm suas grandezas ($X_{M_0,n}$) calculadas por interpolação linear entre zero e um.

Uma vez feito isto para todos os M parâmetros, teremos, então, todas as variáveis normalizadas, tornando-os possíveis de comparação entre si, durante o cálculo das dissimilaridades.

Dissimilaridade

A dissimilaridade entre os componentes j e k ou $D_{j,k}$, representa a “distância” entre j e k em um hiperespaço multidimensional com M dimensões (M = número de variáveis). Sendo esta distância dividida por M , na realidade o operador é uma diferença média quadrática, cujo significado físico é análogo ao do desvio padrão das diferenças entre os valores dos parâmetros das duas amostras j e k .

Desta forma, portanto, quanto menor o valor D , tanto maior deve ser a semelhança entre os elementos considerados. $D = 0$ significa semelhança total, ou seja, as amostras são completamente iguais. A medida que D aumenta, esta semelhança vai diminuindo, ou seja, os elementos vão se distanciando no hiperespaço com

M dimensões. Os valores de D podem variar entre 0 (zero) e 1 (um), respectivamente mínima e máxima dissimilaridade.

O algoritmo elaborado consta de:

1. Cálculo de $D_{j,k}$ comparando todos os elementos, dois a dois, entre si;
2. Comparação entre si de todos $D_{j,k}$ calculados, buscando-se encontrar o D_{j_0,k_0} mínimo; e
3. D_{j_0,k_0} minimantes implica que j_0 e k_0 são os dois componentes mais semelhantes de toda a coleção.

Estes dois elementos passarão a formar um conjunto, que no algoritmo passa a ser considerado um novo elemento j_0 , cujos parâmetros terão por medida a média ponderada dos valores correspondentes nos elementos combinados.

Na ponderação entre os valores dos parâmetros de j_0 e k_0 para a determinação de um novo j_0 , utilizamos como peso para j_0 e k_0 o número de elementos que tenham sido incorporados a cada um respectivamente nos passos anteriores. Esta ponderação é realizada, a fim de que o novo elemento j_0 a ser formado sofra maior influência de j_0 ou k_0 , de acordo com o número de elementos que cada um contenha.

Considerando agora o novo componente j_0 e desprezando k_0 , todos os elementos são novamente comparados entre si recalculando-se suas dissimilaridades $D_{j,k}$. O procedimento segue idêntico ao descrito anteriormente até que todos os elementos tenham sido agrupados.

Dendograma

O dendograma é a exposição gráfica desses resultados: consiste num diagrama em que nas ordenadas são colocados os diversos elementos e em abscissas são colocados os valores de D . Os diversos elementos são agrupados por barras verticais e o mesmo é feito para os vários grupos formados, como mostra a Figura 10.1. A abscissa onde os

dois elementos são agrupados dá o valor de D.

À medida que se desenvolve o algoritmo, os agrupamentos iniciais vão sendo agrupados entre si e vão se juntando a eles elementos isolados. Ao final, todos os vários agrupamentos tendem a se agrupar num único grupo de dissimilaridade máxima. Cabe-nos então escolher, de modo criterioso, os diversos níveis de dissimilaridade em que diferentes grupos tenham que ser considerados.

Atualmente, o método de análise grupal mais usado subdivide o dendograma segundo as dissimilaridades de cada agrupamento, fornecendo, para cada variável, as médias e os desvios padrões dos componentes do grupo em questão. De qualquer forma, esta etapa de escolha dos grupos é muito delicada, exigindo bastante critério pessoal, em função do objetivo do trabalho.

Sendo possível a localização geográfica dos grupos, poder-se-á visualizar em planta o posicionamento relativo dos mesmos dentro do depósito como um todo.

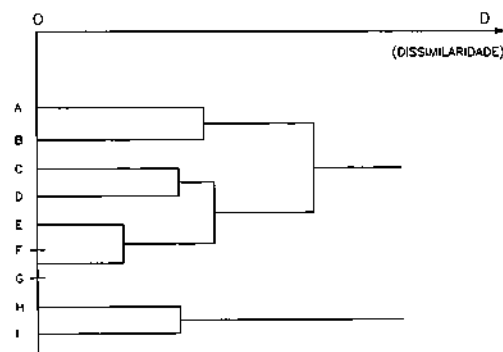
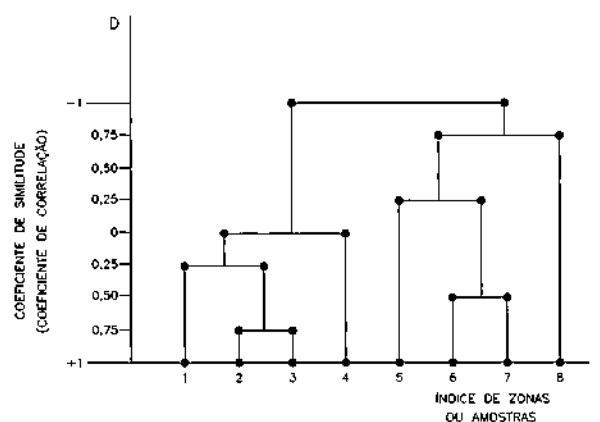
Nota sobre a escolha das variáveis

A fase de escolha das variáveis ou parâmetros caracterizantes das amostras, é de fundamental importância dentro da "Cluster Analysis", uma vez que se constituirão nos eixos de referência para a determinação das "distâncias" ou dissimilaridades entre cada par de amostras. Em resumo, o objetivo do agrupamento está intimamente relacionado às escolhidas, pois um conjunto de amostras pode ser considerado homogêneo em relação a algumas variáveis (ex.: perda ao fogo, dureza, etc.) e totalmente heterogêneo em relação a outras (por ex.: teor de P_2O_5 , CaO, etc.).

Quando o objetivo do estudo é a composição de amostras para ensaios contínuos de beneficiamento, opta-se, normalmente, por variáveis que permitam a obtenção de grupos homogêneos, conhecidamente característicos de possíveis diferentes comportamentos nos processos de concentração a testar.

Note-se ainda que, uma vez escolhidas as variáveis de

importância para a finalidade do agrupamento, a literatura aconselha que se determine o grau de correlação entre as mesmas, evitando a inclusão inútil de variáveis dependentes entre si.



- F e G são totalmente iguais (D=0)
- F + G e E são agrupados
- C + D são agrupados
- (F + G + E) e (C + D) são agrupados
- (F + G + E), (C + D) e (A + B) são agrupados

Fig. 10.1 Dendogramas típicos

Tipologia e análise vário-grupal

Introdução

Mas o avanço mais recente em técnicas de agrupamento e mais fértil em aplicações geológicas é a denominada “análise vário-grupal”, descoberta em Lisboa por Leopoldo Cortêz, F. Muge e H. Garcia Pereira e posteriormente usada também por J.Q. Rogado e Michel David. Trata-se de uma técnica que parte da análise grupal, de que temos vindo a falar, mas que é acrescida pelas teorias da análise variográfica, numa feliz simbiose entre Estatística Clássica e a Geoestatística.

A análise “vário-grupal” foi pela primeira vez divulgada no II CHILAGE, Caracas, Venezuela, em 1973, através da sua apresentação em dois exemplos de aplicação que hoje são históricos:

- “Aplicação da análise vário-grupal à prospecção radiométrica”, de F.Muge e H.Pereira; e
- “Interpretação geo-estrutural por análise vário-grupal de jazigos itabiríticos de cassinga”, de L.Cortêz e F.Muge.

Depois do II CHILAGE, a análise vário-grupal foi consagrada nos XII APCOM (abril de 1974, Golden, U.S.A), XIII APCOM (outubro de 1975, Clausthal, R.F.A) e VII Pribram (outubro de 1975, Checoslováquia) com várias comunicações teóricas e práticas, generalizando-se então as suas aplicações por todo o lado. Do conjunto das comunicações apresentadas naqueles três congressos pelos três “descobridores” da análise vário-grupal, deve-se destacar a apresentada no XIII APCOM e intitulada “*Vario-groupal analysis as a tool for decision making in a step-by-step drilling program*” pela curiosidade do tema e da sua aplicação, muito útil para decisão sobre sondagens muito caras e que, portanto, terão de ser locadas muito criteriosamente.

Finalmente, e antes de mais, deve-se chamar a atenção dos interessados para a técnica do “variograma corrente”,

pela sua grande aplicabilidade geral e não apenas para a análise vário-grupal em pauta.

Conceitos básicos prévios

A dificuldade inicial do técnico de geoestatística aplicada é, como se sabe, a determinação de um variograma único para todo o espaço que pretende tratar (ou a divisão desse espaço nos denominados “campos ou zonas homogêneas” no sentido da estacionaridade pertinente); de fato, para que o fenômeno geológico admita uma estacionaridade é necessário que os fatores que o influenciaram tenham agido aproximadamente do mesmo modo para todo o espaço mineralizado, que a variável seja estatisticamente homogênea ou que as correlações entre os diferentes pontos sejam análogas para toda a jazida em estudo, à “escala” do fenômeno que se pretende estruturar variograficamente; assim, também como já se viu, o critério de decisão sobre a estacionaridade terá de ser “experimental” e suportado em variografia “robusta”.

Seja qual for o tipo de problema que nos preocupe, em qualquer das fases de um empreendimento mineiro, o **variograma** (desde que se ajuste a um determinado “esquema” matemático), surge como um instrumento poderoso de análise, mesmo que para se obter tal ajuste tenha de se dividir a jazida em unidades estruturais (homogêneas), o que pode ser feito pelas técnicas ou da “Análise Fatorial”, ou da “Análise Grupal”, ou do “Zoneamento de Testerman”, etc..

A técnica da “Análise Grupal” é do domínio da Estatística Clássica e assenta no conceito de homogeneidade estatística de uma população: espera-se que um conjunto de valores, onde a variância seja mínima ou a correlação entre eles máxima, conduza a um variograma capaz de revelar uma determinada estrutura interpretável.

De fato, tal não acontece em todos os casos e é possível (sem lançar mão de outro conceito que não a própria definição de **variograma**) desenvolver um método, dito do

variograma corrente, capaz de revelar, num determinado espaço mineralizado, aquelas regiões onde a hipótese intrínseca é válida a uma determinada escala. O método permite ainda seguir a evolução das estruturas no espaço através da análise das relações entre as variáveis reveladas pelo andamento do variograma.

Assim, pode-se dizer desde já que a “análise vário-grupal” é uma técnica de agrupamento de populações baseada na aplicação da análise grupal clássica (modo Q) a sub-domínios definidos por partição do conjunto inicial de dados do terreno, usando como critério de similitude das populações a correlação entre diversas variáveis, obtidas pela técnica do variograma corrente sobre os citados sub-domínios.

O variograma corrente

Introdução

Sejam M amostras alinhadas (tomadas a passo regular) e escolhamos dessas as N primeiras (N deve ser suficientemente grande para permitir a construção de um variograma com significado estatístico). Com essas N amostras constrói-se um variograma: $\gamma_1(h)$

O índice 1 designa: o número de ordem da 1ª amostra.

Retiremos agora a amostra de ordem 1 e introduzamos (respeitando a sua posição especial) a amostra de ordem $N+1$ e, sobre este campo ainda de dimensão N , construímos novo variograma: $\gamma_2(h)$.

O índice 2 designará ainda o número de ordem da 1ª amostra.

Reiterando o processo até percorrer o campo global de M amostras, ficaremos com $M - N + 1$ variogramas cuja posição no campo global é dado pelo índice do seu primeiro elemento (1, , $M - N + 1$).

Podemos, assim, varrer o campo global a passo 1 e acompanhar, através do andamento do variograma, o modo

como evolui a correlação (se existe) entre amostras, fixar as regiões onde esta tem determinado andamento, onde a hipótese intrínseca é válida, onde a distribuição da V.R. é aleatória e quais as regiões que deverão ser agrupadas por terem variogramas semelhantes.

Evidentemente que o passo 1 pode não ser o mais aconselhável, pois é pouco natural que a simples substituição de uma amostra à esquerda por uma à direita provoque uma variação concludente no variograma e a acumulação de informação com características muito semelhantes pode mascarar as diferenciações presentes.

Deve, pois, ensaiar-se diferentes passos (e diferentes dimensões para o campo N) até encontrar a solução mais adequada a determinado problema prático.

Claro que nem todos os casos práticos se apresentam de um modo tão nítido e a interpretação apresenta dificuldades, por vício de subjetividade e por análise “visual” de grande número de variogramas, mas uma análise grupal, sobre os parâmetros do variograma, pode ser concludente, revelando os variogramas mais semelhantes e aqueles que devem nitidamente ser tratados independentemente.

A este tipo de análise, em que a análise grupal vai incidir sobre os parâmetros dos variogramas revelados pela técnica do variograma corrente, dá-se a designação de **análise vário-grupal**.

Ilustração da técnica

Para seguir a evolução espacial das estruturas, procurar as mais coerentes e tentar ligar entre si zonas de estrutura semelhante, desenvolveu-se um método, dito do **Variograma Corrente**, que, sem lançar mão de outro conceito do que a própria definição de variograma, responde aos objetivos enunciados.

Com esta técnica pode-se varrer o espaço e acompanhar, através do andamento dos sucessivos variogramas, o modo como evolui a correlação entre as amostras, fixar as regiões

onde esta se apresenta obedecendo a determinado “modelo”, onde a hipótese intrínseca é válida, onde a distribuição das variáveis regionalizadas é aleatória, etc., e escolher assim quais as regiões da jazida em delineação que deverão ser agrupadas por terem variogramas semelhantes.

Conforme atrás descrito, retiramos uma amostra à esquerda do campo n e adicionamos uma à direita. Esta operação, repetida sucessivamente, corresponde a percorrer todo o espaço das m amostras alinhadas através de um campo de dimensão n (que funciona pois como “janela” ou “diafragma” que permite, em cada operação (1, 2, ..., r , ..., $m-n+1$) retirar o conjunto de amostras sobre as quais será calculado o respectivo variograma). No esquema da figura 10.2 visualizam-se bem as sucessivas operações desta técnica.

Evidentemente que o “passo de análise” 1 (corresponde à distância 1 entre 2 operações sucessivas ou entre 2 posições sucessivas da janela de abertura n) pode não ser o mais adequado, pois é pouco provável que o fato de retirar uma amostra à esquerda e adicionar uma à direita altere significativamente o variograma, e a acumulação de

informação com características semelhantes pode mascarar as diferenciações presentes, conforme já referido.

Devem, pois, ensaiar-se diferentes “passos” de análise (diferentes distâncias entre posições sucessivas da “janela”) e diferentes dimensões para o campo n (diferentes aberturas da “janela”) até encontrar solução adequada a cada problema prático (tomando em conta as restrições correspondentes).

O problema da “localização”

Torna-se evidente que os campos, a que se referem os variogramas revelados pela técnica do “variograma corrente”, apresentam uma sobreposição, que será tanto maior quanto menor for o passo de análise escolhido. Para uma dada dimensão do campo, a sobreposição será máxima para o passo 1.

Em função dessa sobreposição, podemos definir o elemento de máxima discriminação, tido como a porção de campo comum ao maior número de campos analisados.

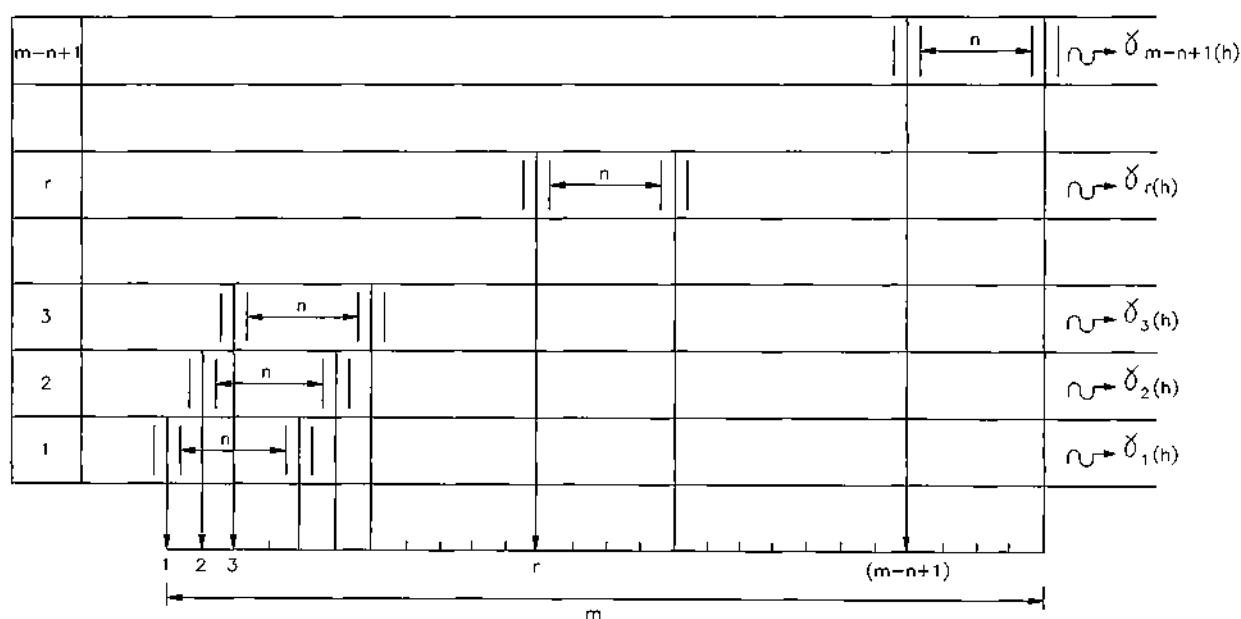


Fig. 10.2 Técnica do variograma corrente

Adotando este elemento como “unidade”, podemos dividir o campo global e elementos de máxima discriminação que serão, por definição, disjuntos entre si, permitindo-nos, pois, resolver o problema da “localização”.

Estes elementos serão classificados com base na classificação dos campos que os englobam, resultado da análise grupal. Isto é, suponhamos por exemplo que o elemento genérico i é “visto” por n campos, n_1 dos quais são classificados como pertencentes à população A e n_2 a B (após a análise grupal). Neste caso o elemento i será caracterizado pelo par de valores: (% de A , % de B), ou seja $(\frac{n_1}{n} A; \frac{n_2}{n} B)$.

Curvas características

Introdução

Assim, calculados os variogramas para cada posição do campo n , põe-se o problema de interpretar o andamento destes. É evidente a dificuldade da análise “visual” do andamento de grande número de variogramas e assim desenvolveu-se um método, dito de **análise vário-grupal**, em que se realiza uma análise grupal sobre parâmetros significativos dos vários variogramas, procurando as sub-populações em que o conjunto dos variogramas se pode dividir. Dentro de cada sub-população o andamento global dos variogramas é semelhante.

Para um passo de análise diferente de 1, define-se o elemento de máxima discriminação como um conjunto de amostras, de cardinal igual ao número de amostras do passo de análise e que são “vistas” simultaneamente pelo mesmo número de campos.

Suponhamos que o elemento de máxima discriminação de ordem i é “visto” por k campos. Sobre cada um destes k campos, construiu-se um variograma e sobre os parâmetros característicos destes k variogramas fez-se a análise grupal

que revelou k_1 variogramas pertencentes à população A e $k - k_1$ pertencentes à população B . O elemento de ordem i contribuiu na “percentagem” k_1 / k para a população A e

em $\frac{k - k_1}{k}$ para a população B . Como o objetivo era

dividir estes elementos em sub-populações, o grau segundo o qual cada elemento pertence a cada sub-população é um número (entre 0 e 1) que corresponde aos valores da função característica de um “conjunto fluido” (“sous-ensemble flou”, “fuzzy set”).

Para dar rigor à análise das curvas características (imagem da “função característica”), selecionar-se-ão seguidamente algumas propriedades e definições de interesse para as aplicações e que surgiram do próprio desenvolvimento da teoria da **análise vário-grupal**.

Entretanto, recorda-se que o estudo da denominada “função característica”, é essencial para a compreensão das propriedades e definições seguintes:

I. Num espaço de pontos X , seja um elemento x . Um conjunto fluido A em X é caracterizado por uma função característica $F_A(x)$ que associa cada ponto x de X a um número real no intervalo $[0,1]$. Cada valor de $F_A(x)$ para x representa o grau em que x pertence a A . Portanto, quanto mais $F_A(x)$ se aproximar da unidade, maior o grau em que x pertence a A .

II. Quando A é um conjunto “vulgar”, a função característica só pode tomar os valores 1 e 0 quando x pertence ou não ao conjunto vulgar A .

III. O complementar de A é representado por A' (é a sub-população B) e:

$$F_{A'}(x) = 1 - F_A(x)$$

IV. As propriedades “normais” dos conjuntos vulgares mantêm-se, exceto, evidentemente:

$$A \cap A' = \emptyset$$

$A \cup A' = E$ onde $\emptyset$ é o conjunto vazio e E o conjunto universo.

V. Para dar um sentido mais rigoroso à noção de “pertença”, podemos introduzir dois níveis α e β , com α

β e α e β no intervalo $]0,1[$, e afirmar:

- x pertence a A_α se $F_A(x) \geq \alpha$
- x não pertence a A_α se $F_A(x) \leq \beta$
- x tem um estatuto indeterminado de “pertença”, se

$\beta < F_A(x) < \alpha$

A_α é o chamado conjunto vulgar de nível α

As aplicações práticas seguintes servirão também para melhor interpretação destas propriedades e definições teóricas pelos interessados.

Interpretação geo-estrutural por análise vário-grupal

Apresentação

É uma das aplicações pioneiras da análise vário-grupal, tendo sido abordada por L.Cortêz e FMuge em “Interpretação geo-estrutural por análise vário-grupal de jazigos itabiríticos de Cassinga” (II CHILAGE, Caracas, Venezuela, 1973).

Neste caso concreto as jazidas itabiríticas estavam amostradas por sondagens rotativas e galerias de reconhecimento e com a análise vário-grupal procurou-se delimitar e correlacionar as zonas de máxima similitude dos conjuntos de amostras, relativamente ao andamento dos variogramas de vários parâmetros (teor tal-qual e dos produtos obtidos (em Fe), e recuperações do Fe em ensaios densitários e de separação magnética). Procurou-se encontrar um modelo matemático para cada sub-população e apresentar-se uma interpretação de síntese para um exemplo (sondagem de uma jazida).

Em suma, dispõe-se de um conjunto de dados retirados de sondagens e galerias realizadas em jazidas itabiríticas da região de Cassinga (Angola) e pretende-se interpretar estruturalmente essas jazidas, procurando relações entre determinadas zonas, afinidades (similitude) entre elas, repetições ligadas com a tectônica da região, etc.. Com este objetivo, procurou aplicar-se a análise vário-

grupal, partindo do pressuposto que a estrutura geológica se refletirá, de algum modo, na estrutura matemática revelada pelo variograma. De fato, a evolução espacial das estruturas é revelada pela técnica do variograma corrente, a similitude entre elas pela análise grupal sobre parâmetros do variograma. A metodologia referida parece adaptar-se ao tipo de problema em causa, logo de imediato.

Descrição da aplicação (exemplo)

Este exemplo, retirado de uma das referidas jazidas, refere-se a dados retirados de uma sondagem de 150 m, amostrada de metro em metro. Seleccionamos para este exemplo as seguintes variáveis regionalizadas: teor tal-qual – TTQ (ligado a quantidade de Fe total existente); rendimento em peso nos líquidos densos – RPLD (ligado à individualização dos minérios de Fe) e teor de concentrado em tubo Davis – TCTD (ligado à quantidade de minério magnético).

Escolhemos a dimensão do campo deslizante ($N = 73$) e o passo de análise ($p=3$).

Apresenta-se a seguir a listagem dos 21 parâmetros (V.V.) que foram escolhidos para a análise grupal:

• $\gamma(2)$, $\gamma(4)$, $\gamma(6)$, $\gamma(8)$, $\gamma(10)$, $\gamma(15)$, $\gamma(20)$, $\gamma(25)$

• $C - \gamma(2)$, $C - \gamma(4)$, $C - \gamma(6)$, $C - \gamma(8)$, $C - \gamma(10)$, $C - \gamma(15)$, $C - \gamma(20)$, $C - \gamma(25)$

$$\bullet \frac{\gamma(2)+\gamma(4)}{2}, \frac{\gamma(2)+\gamma(4)+\gamma(6)}{3},$$

$$\frac{\gamma(2)+\gamma(4)+\gamma(6)+\gamma(8)}{4}$$

• m e σ^2 (média e variância).

Estes parâmetros permitem quantificar o andamento geral dos diferentes variogramas e, portanto, a análise grupal realizada sobre eles permite dividir os campos-

suporte em 2 populações distintas (com variogramas muito diferentes entre si): A e B (aquelas com coeficiente de correlação mínimo).

No conjunto das sub-populações de A e B, podem-se definir as duas que têm o menor coeficiente de correlação, seja A1 e A2.

Como estas populações não se referem a amostras, mas sim a campos (pois é necessário um número significativo de amostras para construir um variograma), para localizar especialmente as referidas populações e sub-populações é necessário classificar cada elemento de máxima discriminação consoante a proporção de campos, pertencentes às populações A1, A2 e B, em que esse elemento está abrangido.

Para simplificação das classificações, dividimos as percentagens dos campos A ou B e classes de intervalos iguais a 10%, como se indica na Tabela 10.1, sendo cada elemento classificado por um número de 1 a 10 de acordo com a contribuição das populações A e B para a sua composição.

Procedemos de igual modo para a classificação dos elementos consoante a percentagem de populações A1 e A2 que o englobam, caracterizando-o por uma letra de A a J como mostra na tabela 10.2.

É, assim, possível traçar, para cada análise vário-grupal, uma **curva característica**, representando em abcissas uma escala métrica localizando espacialmente os elementos de máxima discriminação (e, portanto, as amostras), e em ordenadas o número indicativo da percentagem de populações A e B que englobam esses elementos.

As curvas características relativas à análise feita estão representadas na Figura 10.3 (TTQ), Figura 10.4 (RPLD), e Figura 10.5 (TCTD), indicando-se sempre o valor de corte do coeficiente de similitude.

A forma (andamento) das curvas características pode dar indicações sobre a evolução espacial da estrutura subjacente ao fenómeno, se soubermos exatamente o significado de determinado grupo de amostras (ou elementos) pertencerem, em dada percentagem, a uma

certa população; isto é, se pudermos encontrar o **modelo** estrutural associado a cada população.

Se conseguirmos associar esses modelos, referentes a cada uma das V.R. analisadas, num modelo único global válido para todas elas, poderemos, então, caracterizar perfeitamente todas as amostras e (desde que haja suficiente número dados) construir um modelo da geo-morfologia da jazida.

Tabela 10.1. Classificação dos elementos pela composição em populações A e B

A (%)	B (%)	Nº Representativo
0 – 10	100 – 90	1
10 – 20	90 – 80	2
20 – 30	80 – 70	3
30 – 40	70 – 60	4
40 – 50	60 – 50	5
50 – 60	50 – 40	6
60 – 70	40 – 30	7
70 – 80	30 – 20	8
80 – 90	20 – 10	9
90 – 100	10 – 0	10

Tabela 10.2. Classificação dos elementos pela composição em populações A e B

A2 (%)	A1 (%)	Letra Representativa
0 – 10	100 – 90	A
10 – 20	90 – 80	B
20 – 30	80 – 70	C
30 – 40	70 – 60	D
40 – 50	60 – 50	E
50 – 60	50 – 40	F
60 – 70	40 – 30	G
70 – 80	30 – 20	H
80 – 90	20 – 10	I
90 – 100	10 – 0	J

Para cada grupo de variogramas correspondentes a zonas associadas pela análise grupal, determinaram-se as suas características médias: essencialmente, o tipo de

esquema (aleatório puro, de transição, com deriva, etc.), e, dentro de cada tipo, os parâmetros de maior importância (amplitude, patamar, efeito de pepita, efeito de buraco, zonas cíclicas, etc.), quando existissem.

Com o intuito de sintetizar esta informação, alargaram-se os intervalos das classes que determinavam a classificação duma dada população em A ou B, e em A1 ou A2. Assim, considera-se como A todo o elemento cuja proporção de população A é superior a 60%. AB aquele cuja percentagem de A (ou B) está entre 40% e 60%, e B se a percentagem de A é inferior a 40%.

Procede-se analogamente, para a classificação em A1, A1A2 ou A2 de cada elemento.

Nas figuras 10.6, 10.7 e 10.8 apresentam-se as classificações dos elementos da sondagem para as três V.R. consideradas, e nas figuras 10.9, 10.10, 10.11, 10.12, 10.13, 10.14, 10.15, 10.16 exemplos típicos dos variogramas característicos das populações identificadas.

Analisando separadamente para cada V.R., teremos a seguinte interpretação possível:

I. VARIÁVEL T.T.Q.:

Para esta variável, o andamento revelado pela análise vario-grupal é o seguinte (ver figura 10.6): **A-AB-B**.

Verifica-se, pois, que a divisão A₁, A₂ não tem importância, neste caso, no andamento médio das estruturas.

A₁ só surge fora da zona significativa, e a contaminar B, mas em menos de 40%.

A estrutura A será um esquema de transição, de amplitude 6m e patamar 70. Esta estrutura é interpretada como um conjunto de "bolsas" no interior das quais a V.R. está fortemente correlacionada e coexiste (pelos 100m) com uma estrutura B, significativamente diferente.

Esta estrutura B pode ser interpretada como a alternância cíclica de lentilhas ricas e pobres; cada lentilha tem um núcleo mais rico (ou mais pobre) rodeado de auréolas progressivamente mais pobres (ou mais ricas).

A partir dos 120m, e até ao fim da sondagem, a

estrutura cíclica B desenvolve-se isolada (no sentido de que, em todos os elementos, a respectiva população predomina pelo menos em 60%, como se definiu atrás).

II. VARIÁVEL R.P.L.D.:

A sondagem revela, do princípio para o fim, um andamento do tipo **A1 - A1B - B - A1A2B - A2B - B** (figura 10.7).

Do exame dos variogramas, foi possível concluir-se que:

- A população A1 era representada por um variograma de transição, do tipo esférico, de amplitude de cerca de 3m, efeito de pepita 50 e patamar 500;
- A população A2 era do mesmo tipo, mas com pescoço de cavalo, efeito de pepita 50 e patamar 400;
- A população B era caracterizada por um efeito de pepita puro, de patamar 200.

Percorrendo então a sondagem do início ao fim, a evolução espacial das estruturas apresenta-se do seguinte modo:

Um esquema esférico inicial A1, isto é, um fenómeno de transição em que a correlação entre os valores da V.R. vai diminuindo com o aumento da distância, até se anular para distâncias iguais ou superiores à amplitude. Esta pode ser interpretada como a dimensão média de "bolsas" mineralizadas, no interior das quais a V.R. está fortemente correlacionada, havendo de bolsa para bolsa independência entre os valores tomados pela V.R..

Este esquema esférico começa a ser perturbado a cerca de 35m pelo aparecimento da estrutura B, ou seja, a sua amplitude e o patamar principiam a diminuir, enquanto o efeito de pepita aumenta. De acordo com o modelo proposto, o que se passa é uma diminuição na dimensão média das bolsas, até que estas, por volta dos 90m, tornam-se menores que a malha de amostragem (igual a 1m, como se referiu) e, portanto, o que se passa no interior delas sai da escala de análise. Não se nota qualquer correlação entre V.R. de bolsas diferentes, mas a sua variância "à priori" é inferior à zona anterior (cerca de metade).

A influência de A_2 é pequena (visto não haver elementos pertencentes a A_2 “puro”, segundo a convenção definida atrás) e cifra-se pela tendência (aos 105-120m) para o aparecimento de um pescoço de cavalo. Este pode ser interpretado como uma organização das bolsas (de dimensão média análoga à que apresentavam em A_1) em lentilhas de dimensão média 10m, no interior das quais a V.R. tem uma tendência crescente (ou decrescente). O fato de $\gamma(h)$ tender para um patamar de cerca de 400, (para distâncias superiores a 10m) denuncia que as lentilhas são independentes umas das outras.

III. VARIÁVEL T.C.T.D.:

No caso desta variável, a sondagem revela um andamento (que se representa na figura 10.8), do tipo: $A_1 - A_1A_2 - A_2 - A_2B - B - A_2B$

A população final A_2 (aos 135m) já sai fora da zona significativa, pois se encontra numa zona que só é “vista” por um número reduzido de campos e, portanto, as conclusões que se tirariam não são seguras.

Do andamento médio dos variogramas, concluiu-se que a população A_1 se caracterizava por um esquema esférico de transição, de amplitude 6m, efeito de pepita $c_0 = 10$ a patamar $c = 23$.

Trata-se, portanto, de uma estrutura em bolsas de dimensão média 6m, e independentes para distâncias superiores a esta.

Esta estrutura começa a coexistir (a cerca de 30m) com outra, do mesmo tipo, mas com marcado efeito ascendente. Dar-se-á, pois, uma organização das bolsas em lentilhas com uma determinada estrutura interna e independentes uma das outras. A organização no interior das lentilhas é, neste caso, ligeiramente diferente do que acontecia no caso anterior: as bolsas dilatam-se (a amplitude passa de 6 para 8m), e tornam-se independentes (ainda no interior da lentilha). Só para distâncias de cerca de 15m se nota uma tendência para as bolsas se organizarem de modo crescente, denotando enriquecimento ou empobrecimento progressivo.

Esta estrutura de lentilhas (A_2) torna-se preponderante pelos 75 a 90 m, e vai contaminar a outra estrutura B à esquerda e à direita, podendo ainda concluir-se que a tendência, para lá do fim da sondagem, será o reaparecimento da estrutura A_2 .

A estrutura B (105 – 120 m) não revela nenhum fenómeno de transição. As bolsas saíram da escada métrica e surge um fenómeno de “deriva”, isto é, a V.R. tem um andamento monótono.

Poder-se-á supor que a estrutura A_2 (em lentilhas) é um “prelúdio” do aparecimento da deriva. As lentilhas ter-se-ão dilatado de tal modo que $\gamma(h)$, para o campo de análise, apresenta um crescimento contínuo, denunciando monotonia na evolução da V.R..

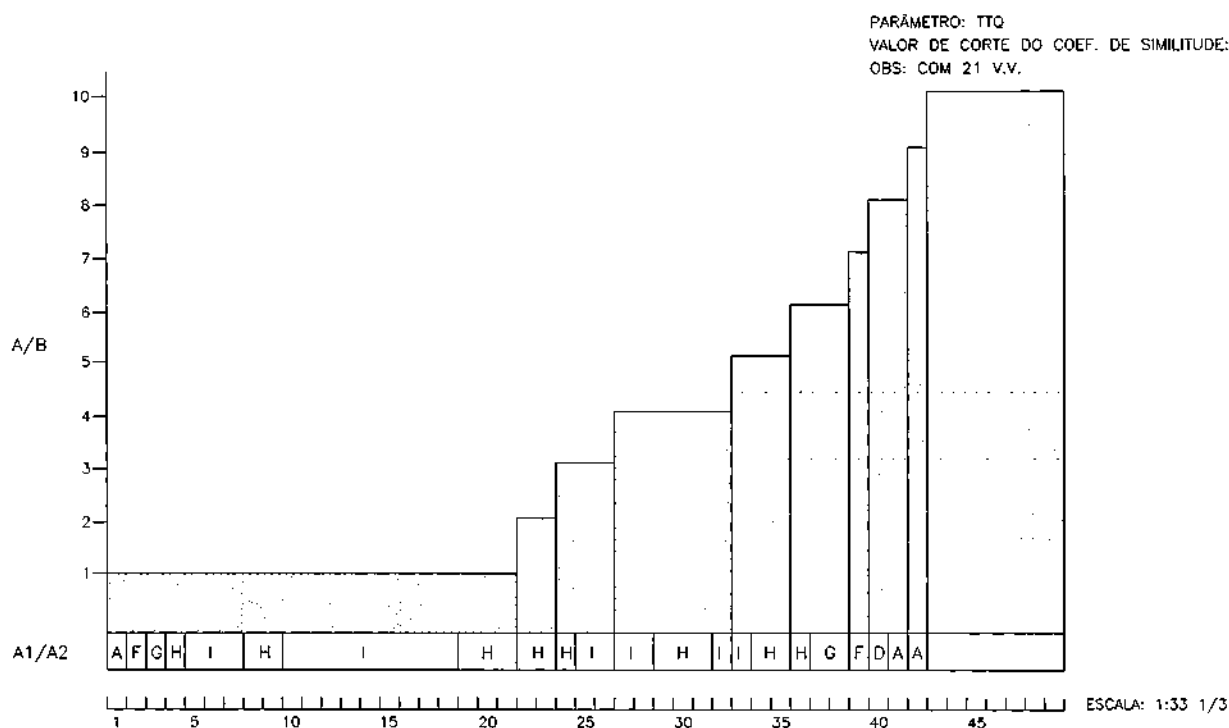


Fig. 10.3 Exemplo de interpretação vário-grupal

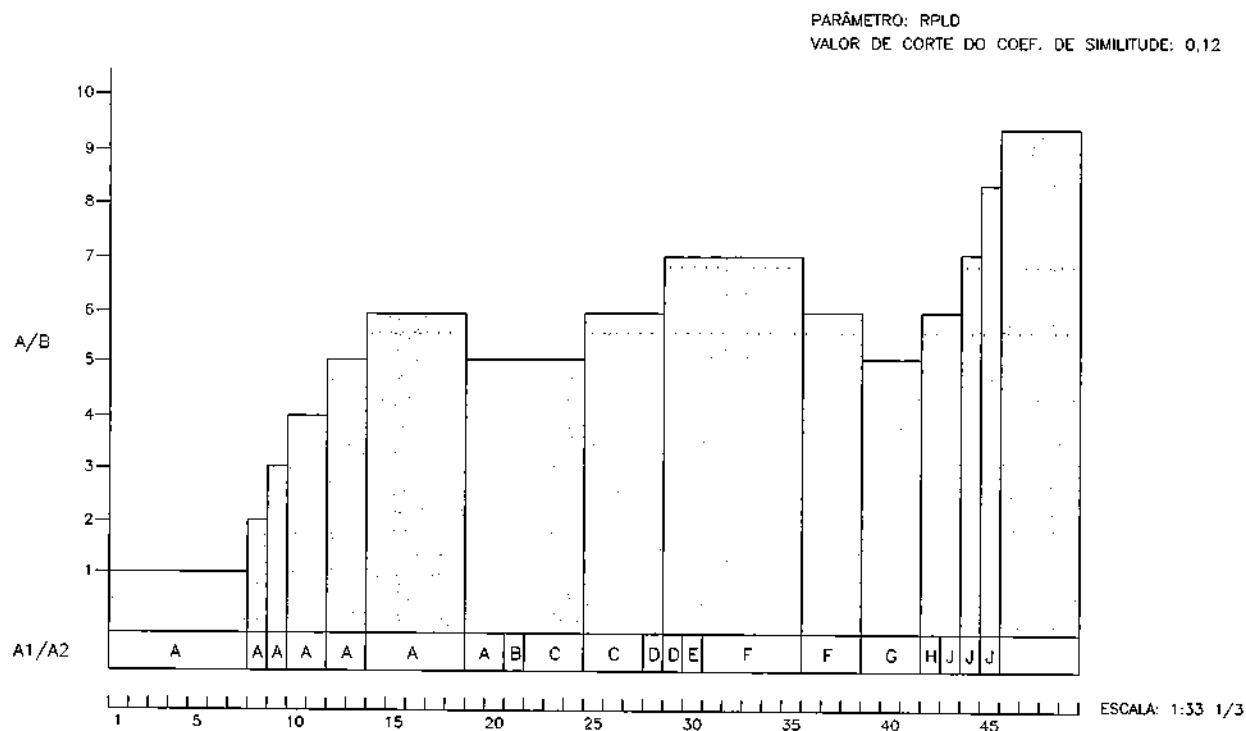


Fig. 10.4 Exemplo de interpretação vário-grupal

10. Uso da tipologia na delineação

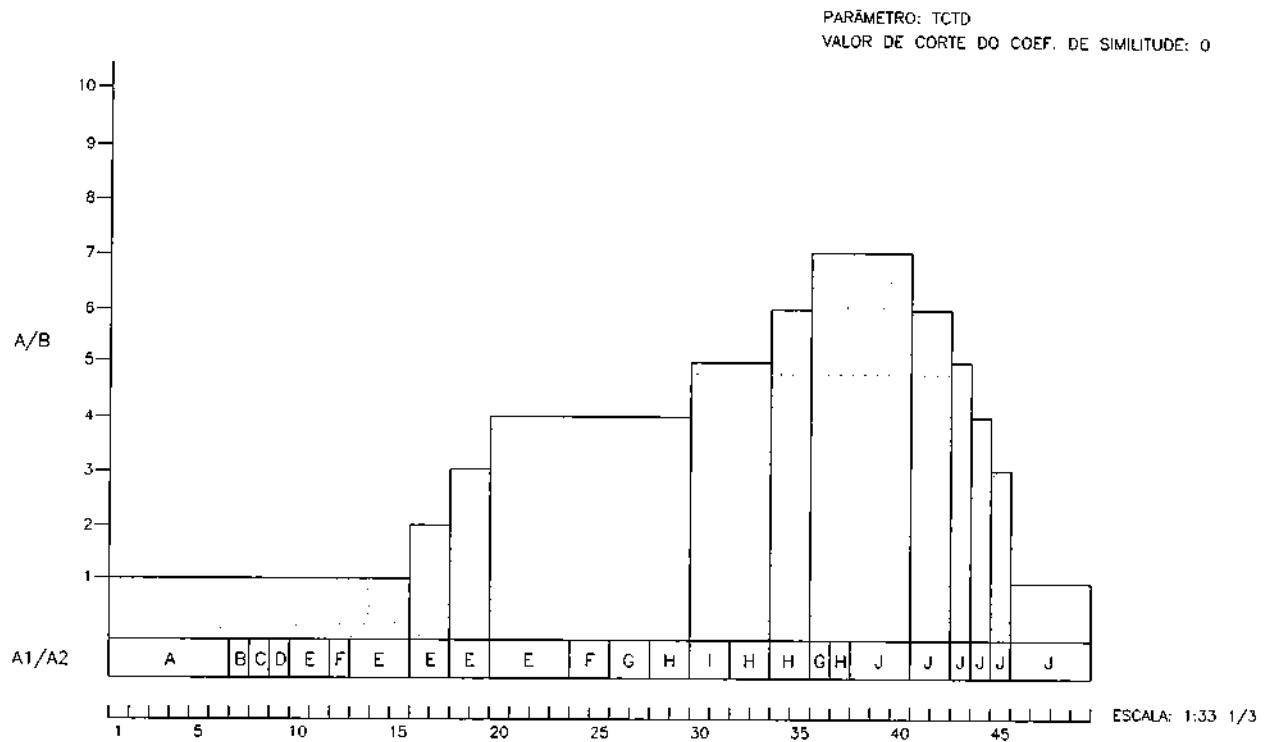


Fig. 10.5 Exemplo de interpretação vário-grupal

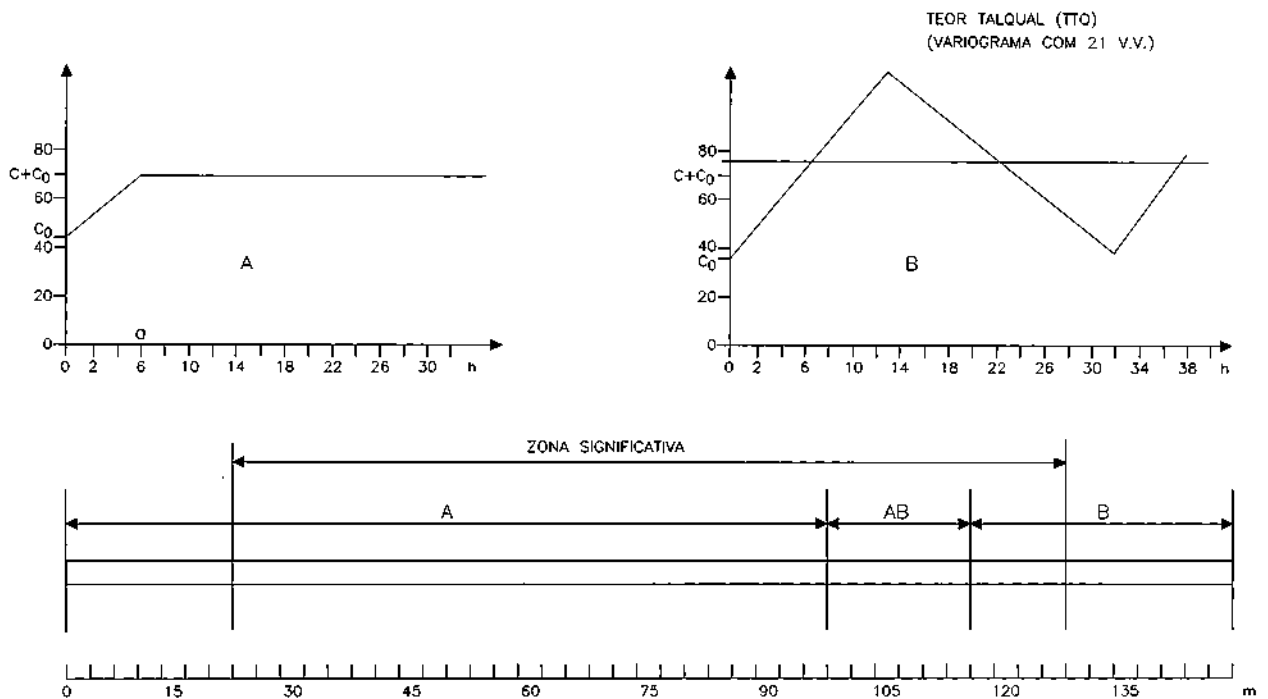
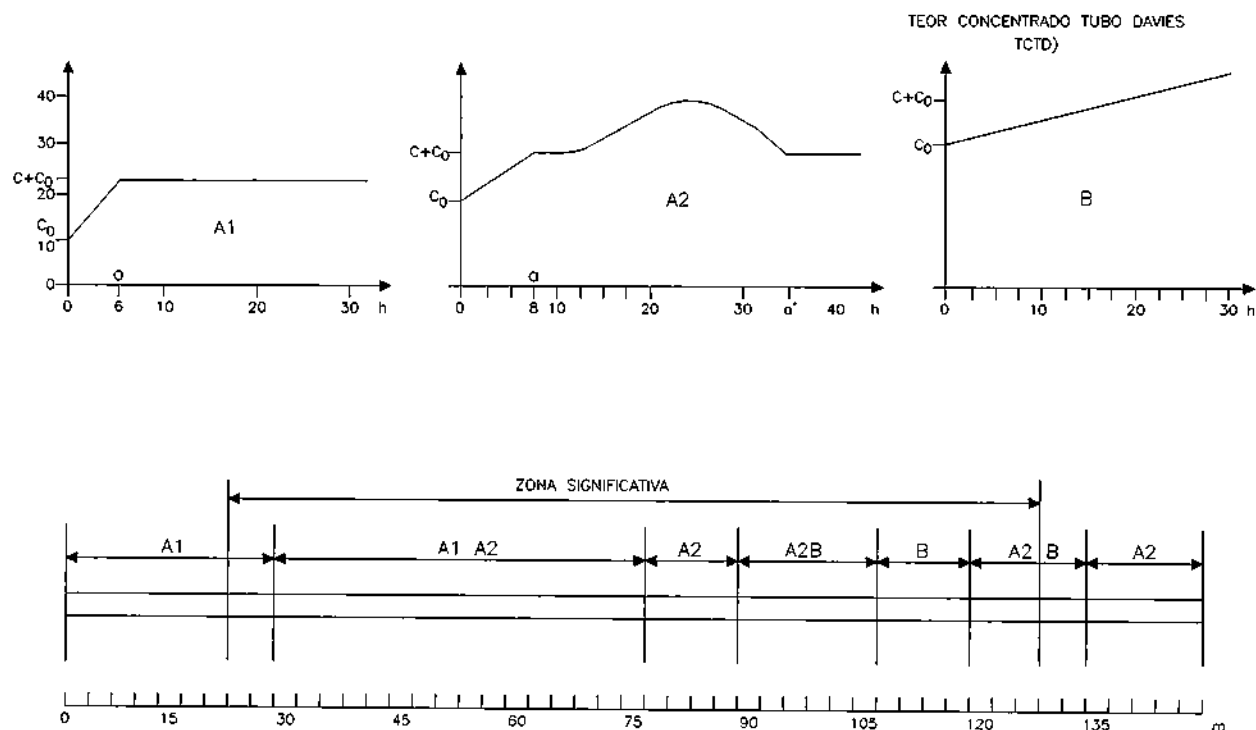
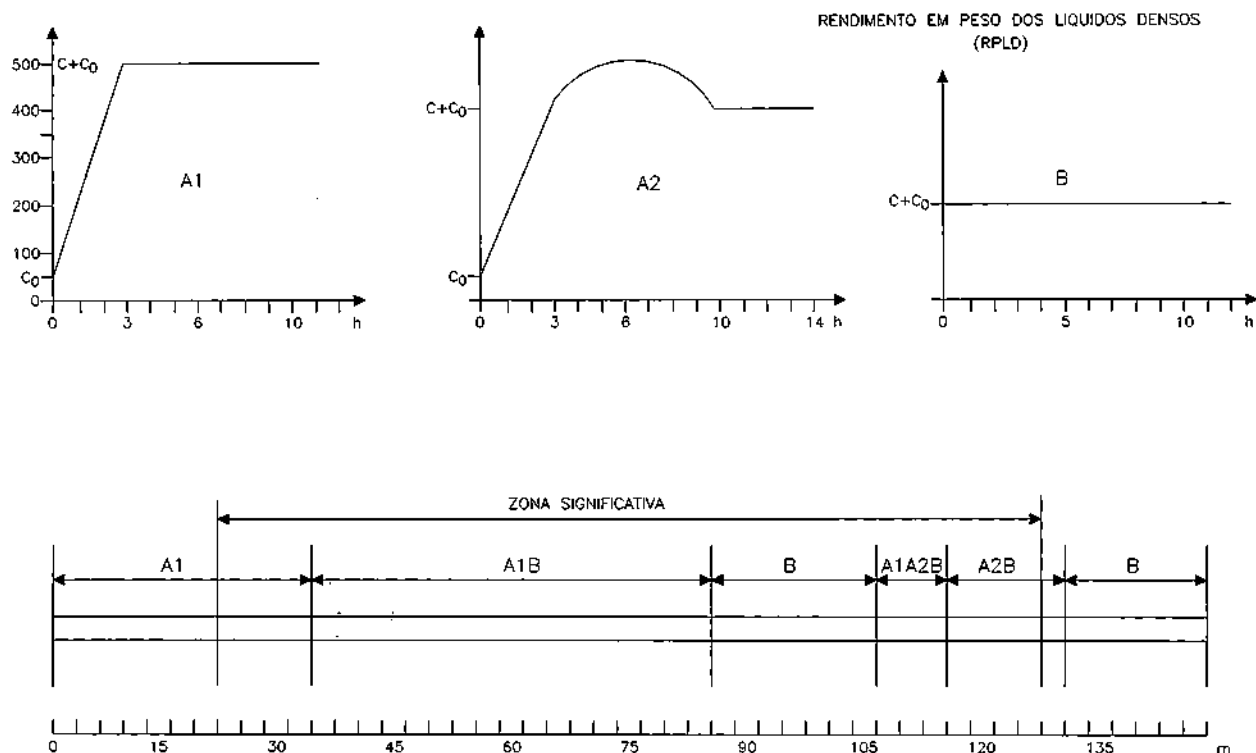


Fig. 10.6 Exemplo de interpretação vário-grupal



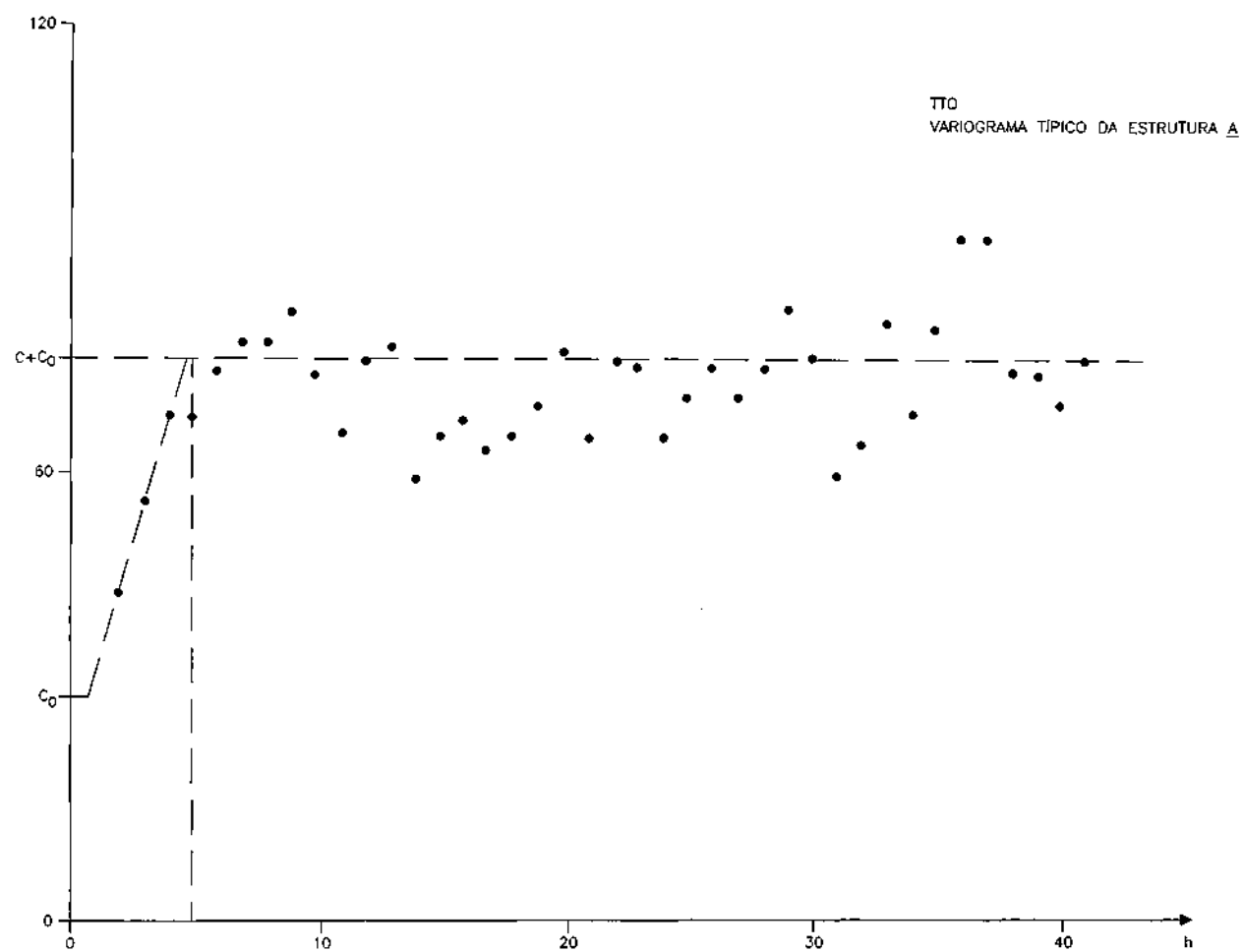


Fig. 10.9 Exemplo de interpretação vário-grupal

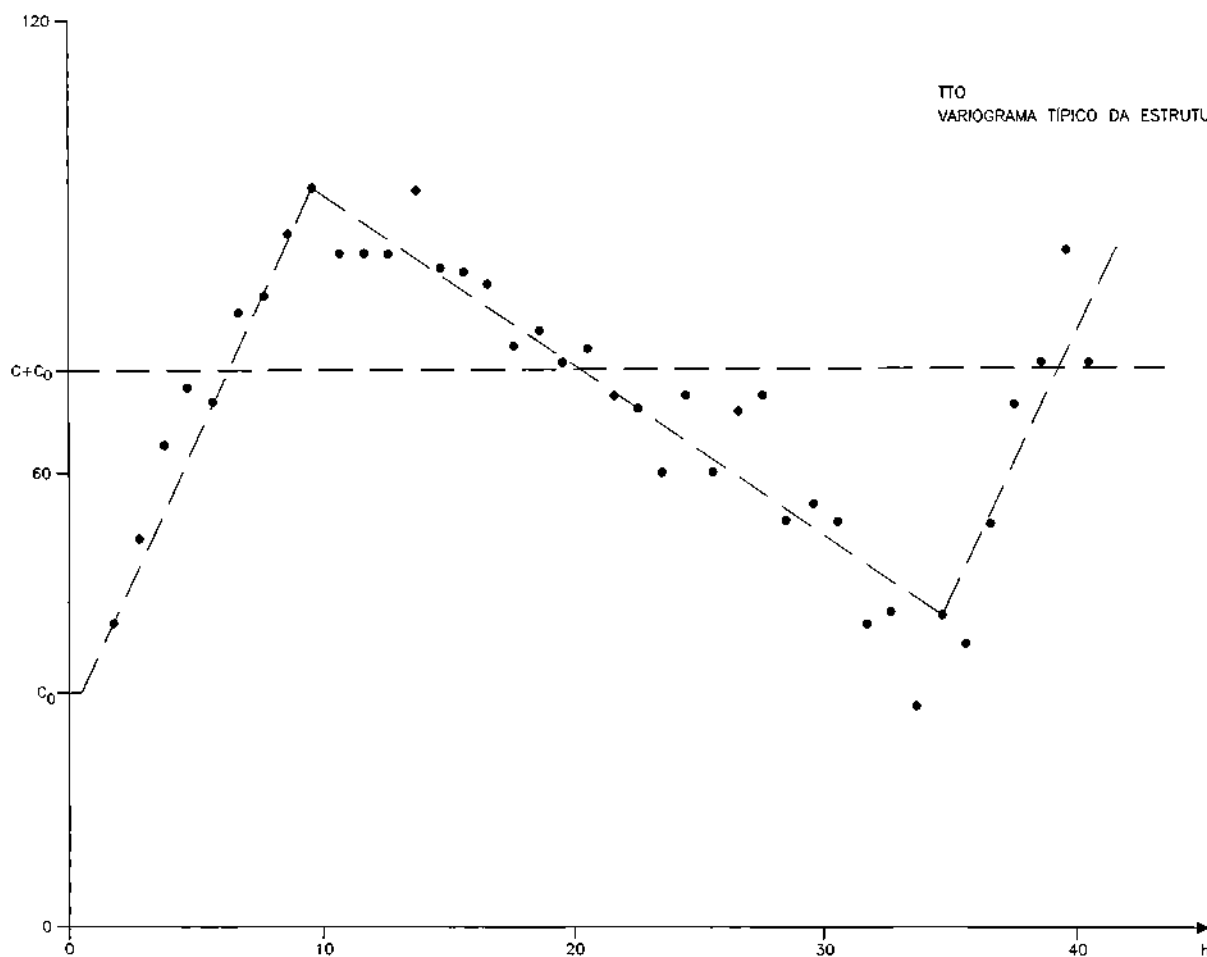


Fig. 10.10 Exemplo de interpretação vário-grupal

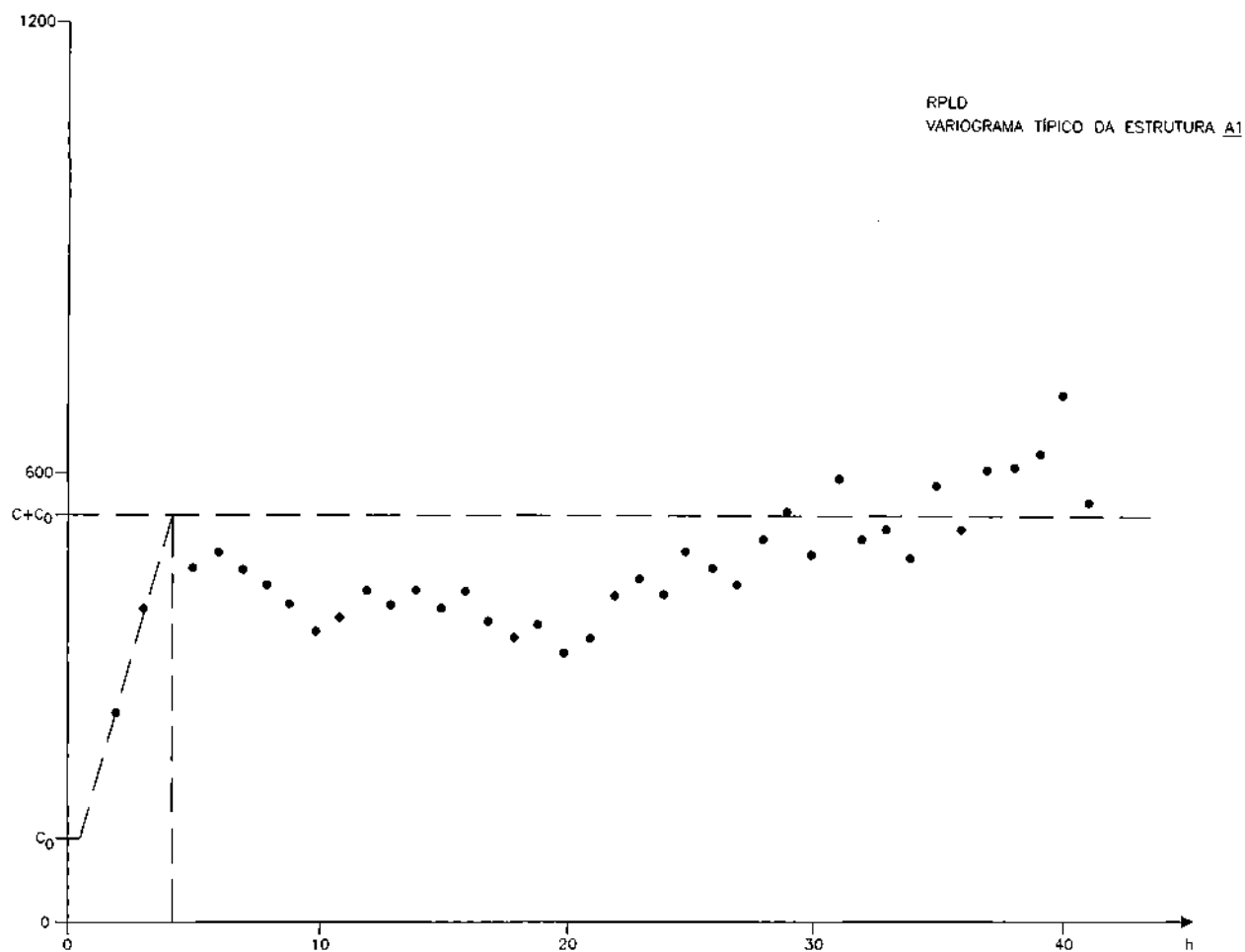


Fig. 10.11 Exemplo de interpretação vário-grupal

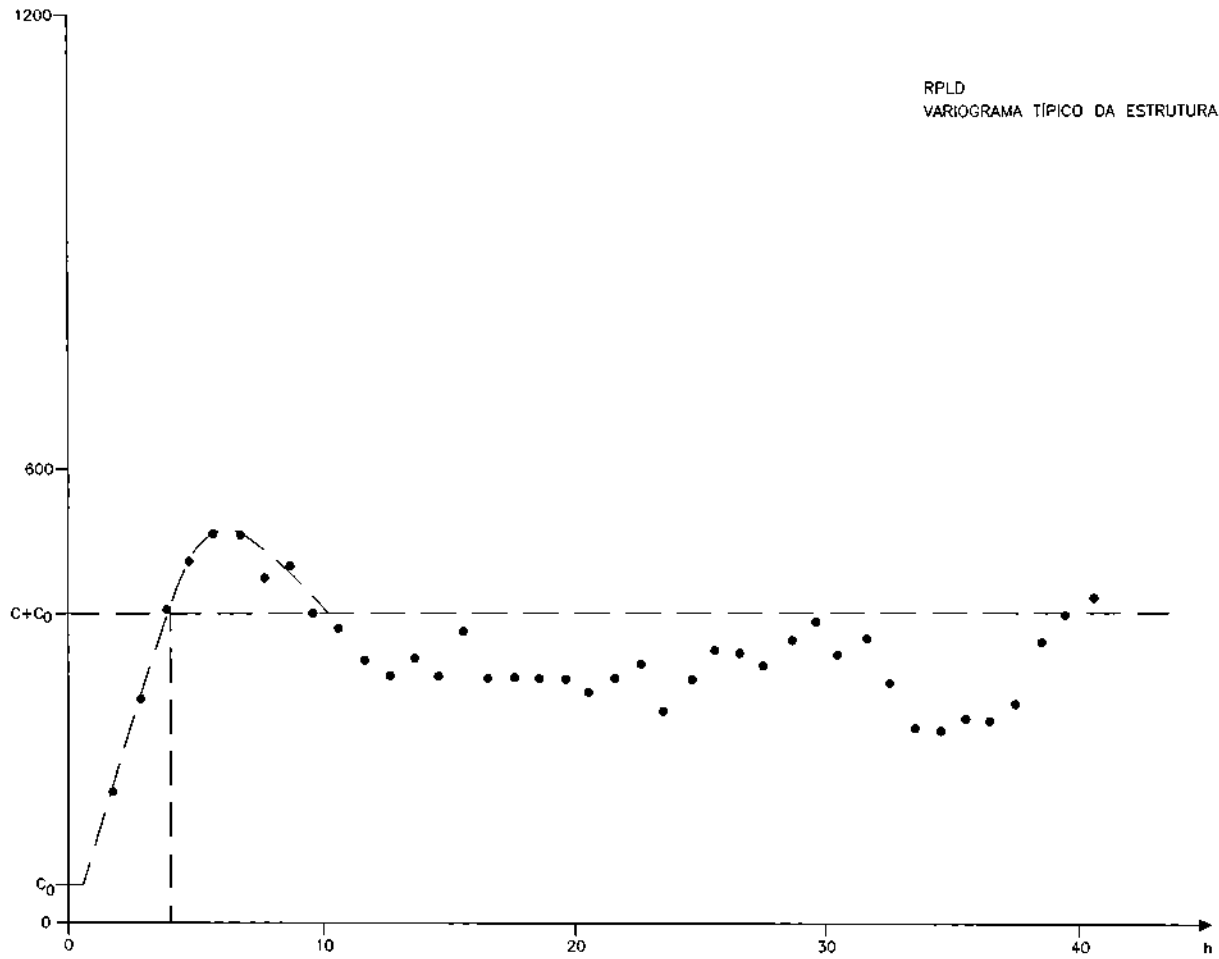


Fig. 10.12 Exemplo de interpretação vário-grupal

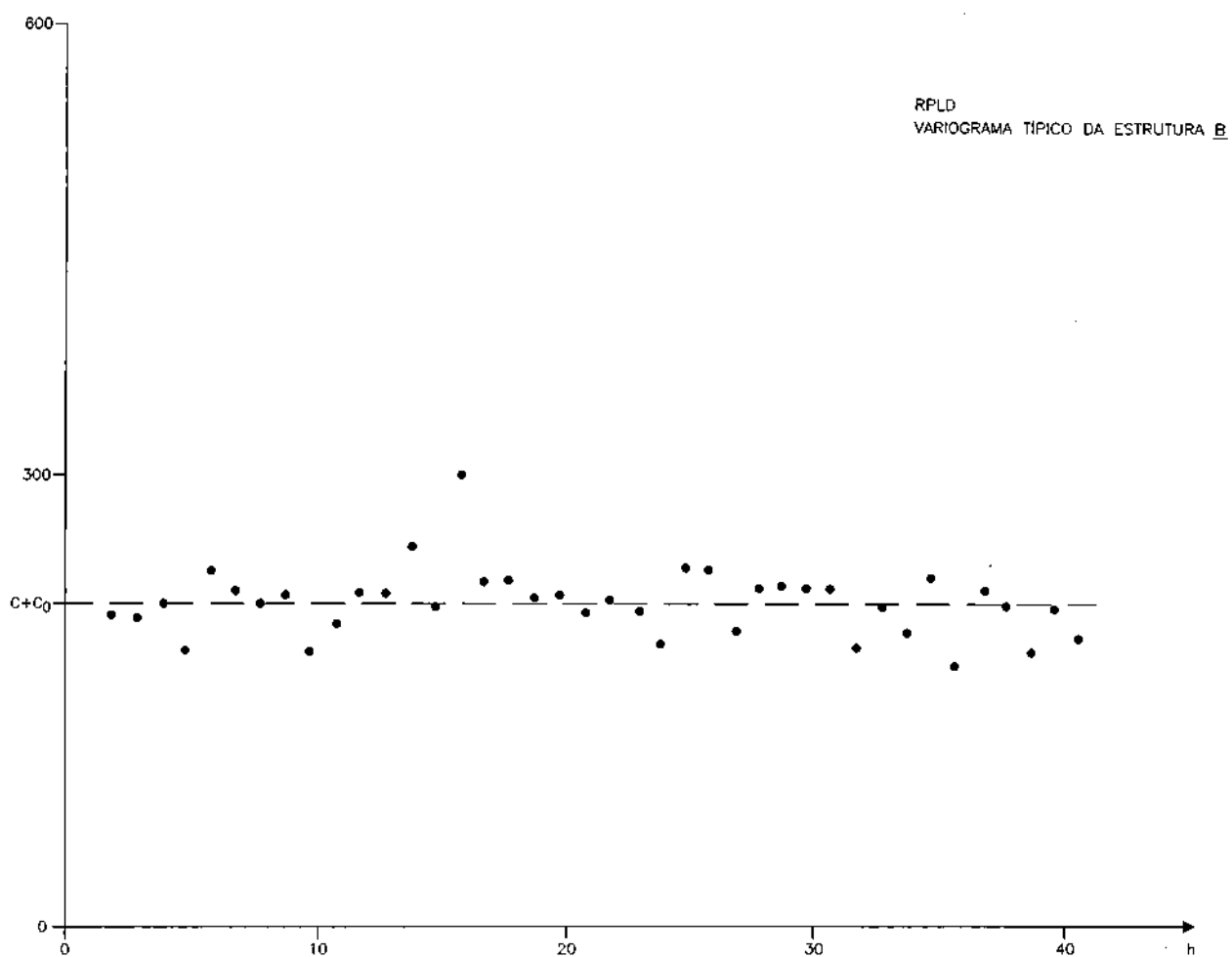


Fig. 10.13 Exemplo de interpretação vário-grupal

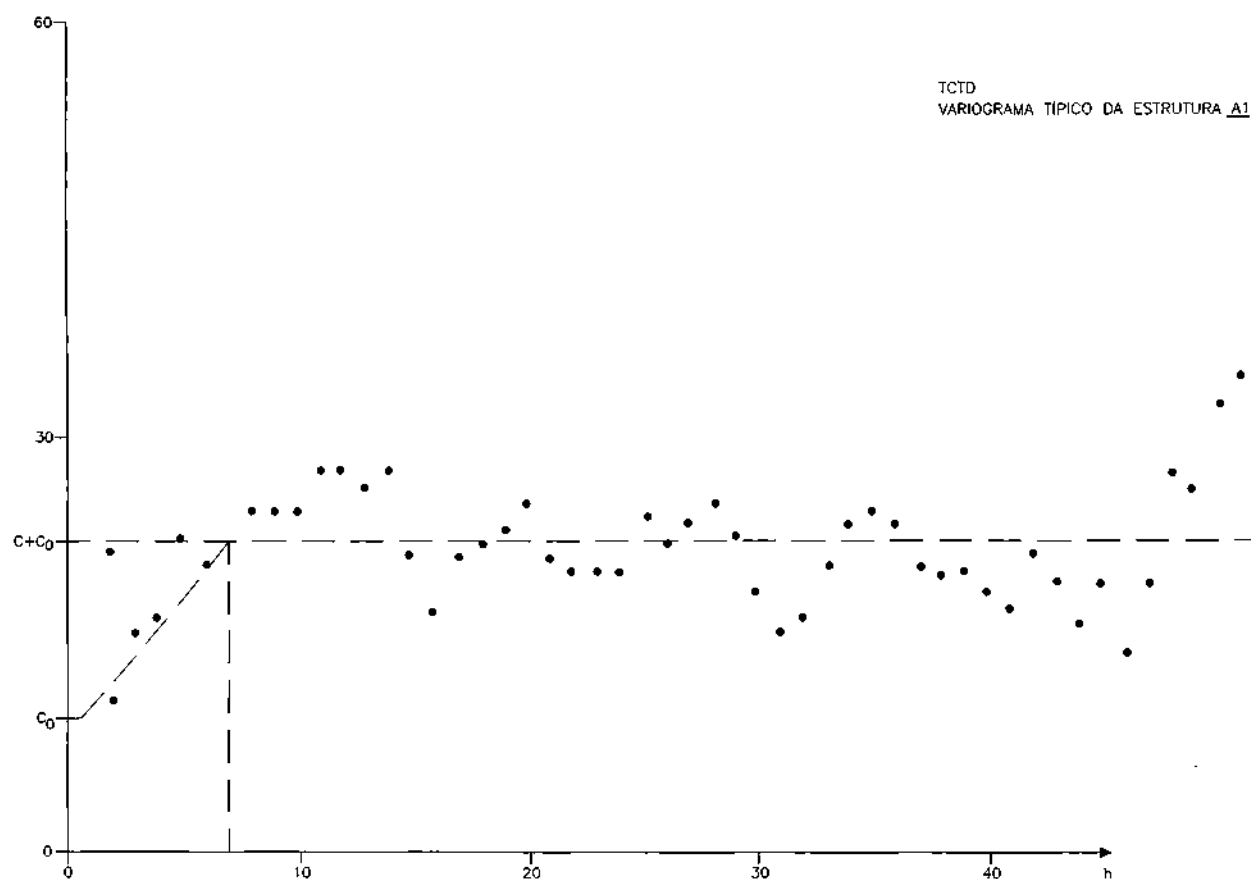


Fig. 10.14 Exemplo de interpretação vário-grupal

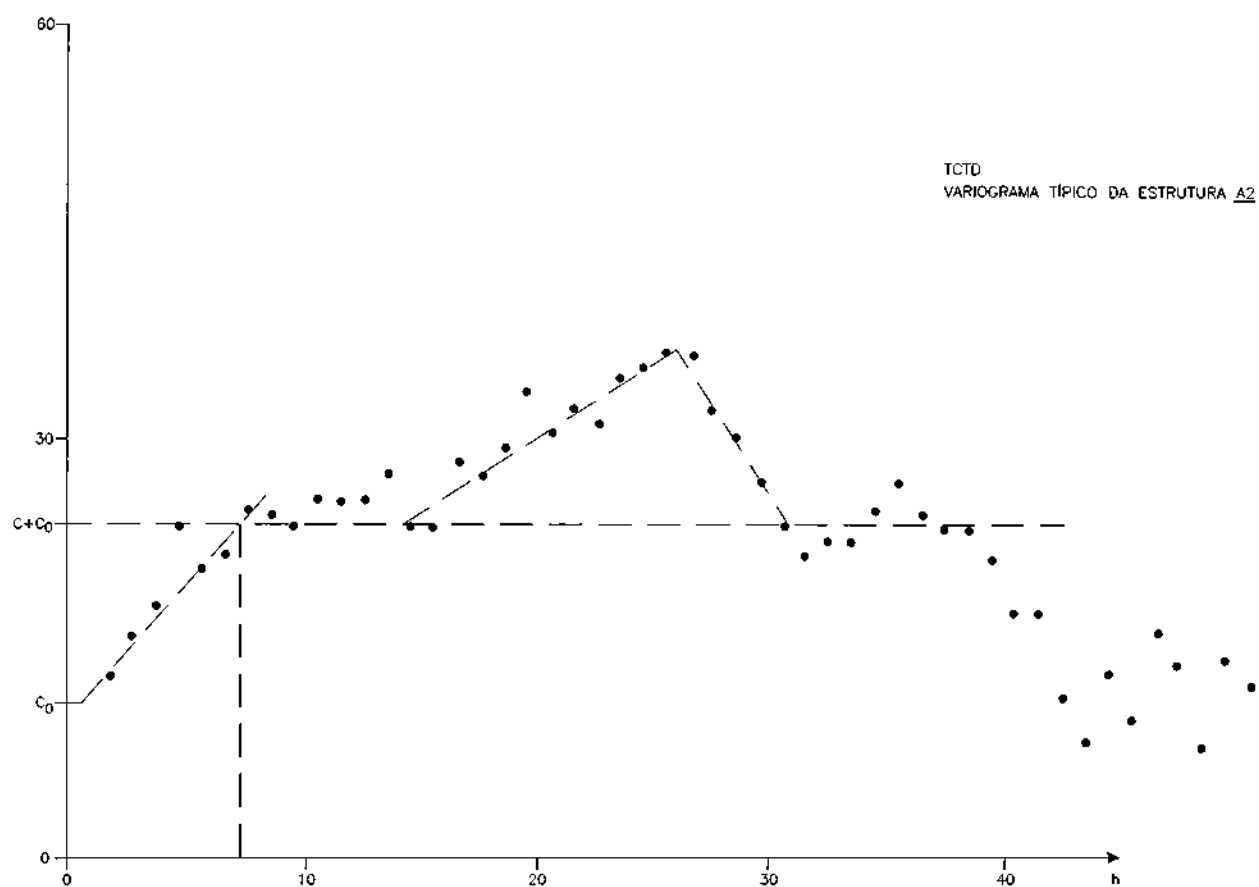


Fig. 10.15 Exemplo de interpretação vário-grupal

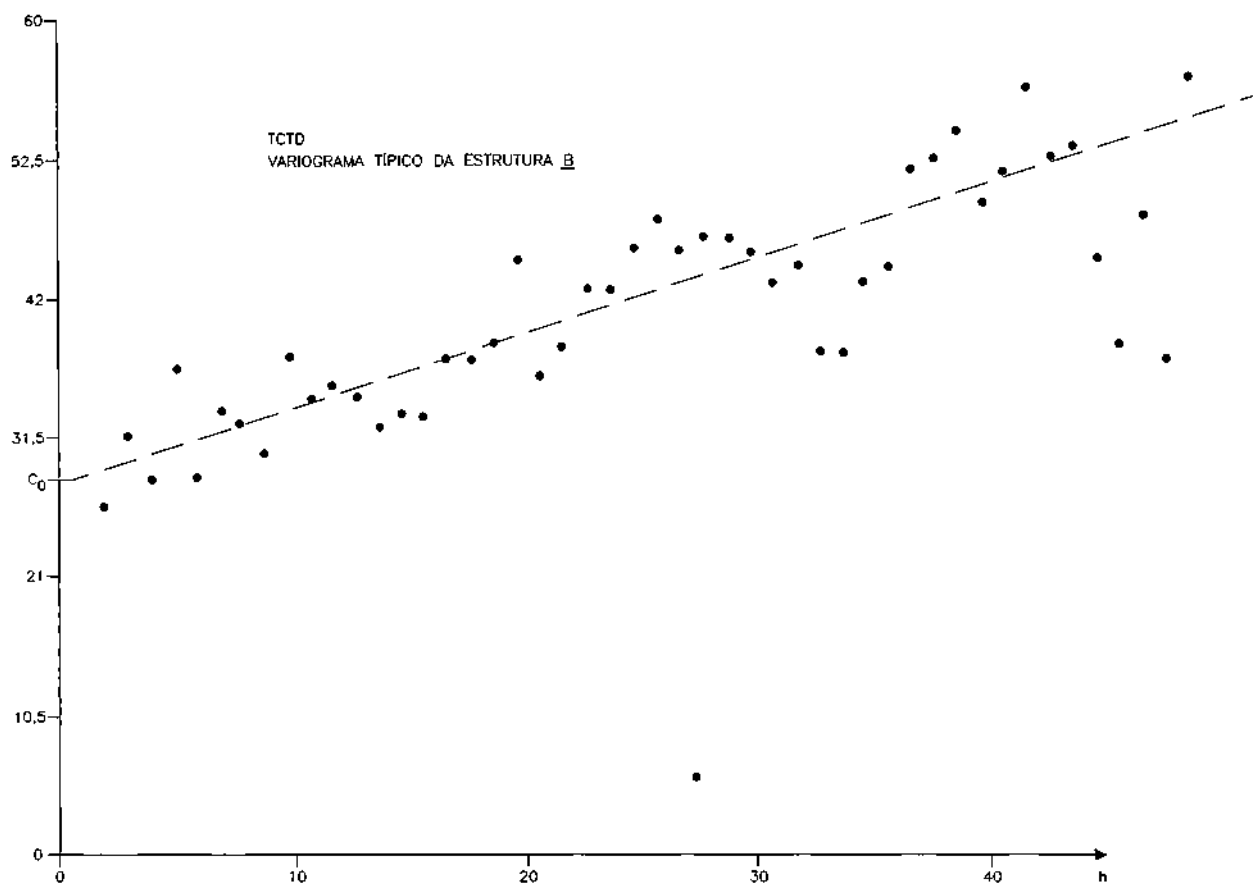


Fig. 10.16 Exemplo de interpretação vário-grupal

Tentativa de interpretação global (exemplo)

Tentando dar uma visão de conjunto, englobando as interpretações parcelares referentes às três V.R. anteriormente analisadas, parece poder-se concluir que:

a) Existe um esquema esférico no início da sondagem. No caso do T.T.Q., esse esquema não se diversifica, como acontece para as outras V.R.; esta conclusão parece poder-se relacionar com a natureza das variáveis, pois o T.T.Q. refere-se a um aspecto geral da mineralização (quantidade total de Fe presente);

b) Esta estrutura de transição é sempre perturbada por uma outra população, que denuncia a existência de efeito de pepita puro (RPLD), deriva (TCTD) ou fenômeno cíclicos (TTQ); esta população perturbante surge repetida no caso do RPD, enquanto que nos outros aparece apenas uma vez; e

c) A transição entre as duas estruturas faz-se, em geral, por um esquema com “efeito de buraco”, o que pode servir de indicação para prever a organização das estruturas para além do fim da sondagem.

Notas finais

No exemplo acabado de ser abordado obteve-se a interpretação de uma sondagem de uma jazida itabirítica, mas a investigação não foi só restrita a esta sondagem, tendo prosseguido sobre a relação de várias sondagens entre si e de jazida para jazida. Os resultados de tal estudo já foram objetos de diversas comunicações científicas de Cortêz, Muge e Pereira, provando-se que com base em modelos matemáticos (da correlação espacial entre variáveis regionalizadas) de determinadas estruturas geológicas (em jazidas de mineralização complexa), é possível analisar a evolução espacial destas, procurando similitudes entre determinadas zonas (relacionadas provavelmente com a tectônica da região).

Esta análise, dita **análise vário-grupal**, parece adequada ao tipo de problemas em que se pretende

relacionar entre si amostras (especialmente localizadas) colhidas em trabalhos de reconhecimento, escolher aquelas que pertencem à mesma “estrutura” (caracterizando esta pelo respectivo modelo matemático) e as que terão de ser tratadas independentemente, contribuindo para a delimitação externa e interna da jazida.

Análise vário-grupal como instrumento de decisão em campanha de sondagens

Apresentação

Num programa de sondagens “passo a passo” é comum a apresentação do seguinte tipo de problemas:

- Onde localizar a próxima sondagem?
- Quando se deve terminar o programa de sondagens, ou seja, quando é que uma sondagem adicional já nada acrescentará à informação já existente?

Para obter respostas quantitativas a estes problemas de decisão, cada sondagem tem de ser relacionada com as características estruturais de alguma V.R., como é lógico.

Pereira, Cortêz e Muge, na sua comunicação ao XIII APCOM referida antes, provaram que a análise vário-grupal é aplicável, com grandes vantagens, como ferramenta daquela tomada de decisão, através da definição da “**distância estrutural**” entre sondagens, tal como se mostra no exemplo que se aborda em seguida, também referente a uma das jazidas itabiríticas de Cassinga (Angola).

Descrição da aplicação (exemplo)

Considera-se que a jazida em estudo é de grandes dimensões e que as condições operacionais das sondagens são difíceis e dispendiosas. No caso da jazida usada para esta exemplificação (jazida Matote) um reconhecimento preliminar revelou interesse na continuação da pesquisa, embora a nível cuidadoso, isto é, esperando-se os resultados

de cada sondagem para se decidir sobre a nova sondagem a ser efetuada.

Sob o ponto de vista geológico há um número mínimo de informações necessárias à descrição de uma jazida, de forma aceitável, pelo que a presente aplicação pode ser assim equacionada:

- de um conjunto de sondagens (definidas pela geologia conhecida antes), decidir quantas sondagens a_1 foram significativas;
- definir o número b de sondagens complementares a efetuar e localizá-las na jazida;
- extrair a máxima informação estrutural sobre a variabilidade do minério, sob o ponto de vista do seu beneficiamento, a partir de cada sondagem e escolher as “zonas homogêneas” necessárias. Isto porque as mostras anteriores da jazida Matote já haviam sido submetidas a testes de beneficiamento e havia ainda dificuldades no estabelecimento do “flow-sheet” de tratamento mineralúrgico, em função da variabilidade evidenciada entre as amostras no que respeitava a importantes características do minério, em termos de “processo mineral”.

Ao tomar a decisão de se procurar, com um programa de sondagens “passo a passo” (sondagem a sondagem, todas difíceis e caras), definir níveis de informação e áreas homogêneas na jazida, havia a preocupação de minimizar o custo de pesquisa, sem aumentar o risco de erros na interpretação seqüente. Logicamente, admitia-se também que as variabilidades referidas dependiam de diferentes “estruturas” da jazida; de fato, uma análise geomatemática prévia, sobre os dados das amostras existentes, mostrara que o “variograma global” era um fruto de vários “embricamentos”, quando a V.R. em estudo era uma variável importante em termos do “beneficiamento” do minério.

No caso concreto em pauta, através da aplicação da análise vário-grupal, os diversos variogramas foram classificados e agrupados em “populações homogêneas” onde o “grau de semelhança” pertinente a cada amostra, colocado em gráficos adequados, permitiu a obtenção da “curva característica “de cada” área homogênea” da

jazida. As decisões posteriores, sobre cada sondagem a efetuar, foram, então, fáceis de tomar, conforme se mostra adiante.

“Distância estrutural” entre sondagens

A idéia básica para resolução do problema em pauta é achar um método capaz de descrever a estrutura mineralizada de uma forma quantitativa, onde cada sondagem seja representada por um ponto do espaço cujas coordenadas devem ser tais que as características estruturais da V.R. sejam tomadas na devida conta.

A análise vário-grupal mostra que a estrutura global média descrita por um variograma, neste caso suportado pelas amostras existentes (diferentes X_G para V.R. em estudo), é, na verdade, suportado por um conjunto de populações distintas ou não homogêneas (separadas em A e B por certo “valor de corte” em termos de dissimilaridade, na análise grupal simples); este fato não podia ser ignorado na procura de melhor informação geológica e mineralúrgica, havendo que separar a jazida nos “campos homogêneos” pertinentes, ditos “tipos”.

Para este fim, assumiu-se a necessidade de dividir as informações em dois campos: um onde a dissimilaridade em relação a A fosse $\alpha > 0,5$ e outro com $\alpha < 0,5$. A parte onde $\alpha > 0,5$ seria representada por um ponto no espaço n -dimensional (n sendo o número de características consideradas):

$$XA = \frac{\sum_{i=1}^J p_i [\alpha_i A + (1 - \alpha_i) B]}{\sum_i p_i}$$

onde: p_i é o número de “janelas” que “observam” a amostra i ; A e B são parâmetros característicos do variograma médio das populações A e B; e I e J são os pares dos limites na abscissa da curva característica correspondente às ordenadas no intervalo] 0,5;1]. A parte onde $\alpha < 0,5$ será caracterizada pelo ponto:

$$X_B = \frac{\sum_{i=1}^J p_i [\alpha_i A + (1 - \alpha_i) B]}{\sum_i p_i}$$

onde I e J são os pares dos limites na abscissa da curva característica correspondente às ordenadas no intervalo [0;0,5].

A medida da heterogeneidade será a diferença:

$$X_H = |X_A - X_B|$$

e este valor “medirá” a “diferença estrutural” entre cada sondagem. Mas duas sondagens poderão ter a mesma “heterogeneidade média” e as suas curvas características serem diferentes – basta que os intervalos da sequência ABA sejam diferentes de uma sondagem para outra, por exemplo; para levar isto em conta, considerou-se cada sondagem “cortada” em 3 partes: cimo (parte 1), centro (parte 2) e base (parte 3), e caracterizou-se cada parte por um ponto no referido espaço n-dimensional:

$$X_1 = \frac{\sum_{i=1}^{m/3} p_i [\alpha_i A + (1 - \alpha_i) B]}{\sum_i p_i}$$

$$X_2 = \frac{\sum_{i=m/3+1}^{2m/3} p_i [\alpha_i A + (1 - \alpha_i) B]}{\sum_i p_i}$$

$$X_3 = \frac{\sum_{i=2m/3+1}^m p_i [\alpha_i A + (1 - \alpha_i) B]}{\sum_i p_i}$$

A medida da “heterogeneidade local” interior a cada sondagem poderá ser:

$$X_{12} = |X_1 - X_2|$$

$$X_{13} = |X_1 - X_3|$$

$$X_{23} = |X_2 - X_3|$$

$$X_L = \frac{X_{12} + X_{13} + X_{23}}{3}$$

Para descrever cada sondagem por um ponto no espaço dos parâmetros do variograma, temos 3 parcelas: estrutura global (X_G), heterogeneidade média (X_H) e heterogeneidade local (X_L), pesados pelos fatores α , β e γ cujos valores dependem da decisão a ser tomada (variabilidade aceita):

$$P = \alpha X_G + \beta X_H + \gamma X_L$$

Assim, a “distância estrutural” entre a sondagem I e a sondagem II é calculada por:

$$d^{I,II} = \sqrt{\alpha^2 (X_G^I - X_G^{II})^2 + \beta^2 (X_H^I - X_H^{II})^2 + \gamma^2 (X_L^I - X_L^{II})^2}$$

e este valor dá-nos uma sensibilidade quantitativa, mensurável pela análise vário-grupal, que passará a ser ferramenta decisória.

Escolha das variáveis (exemplo)

Para simplificação da apresentação do exemplo e porque na verdade trata-se de uma variável abrangente (considera todas as outras variáveis), considera-se agora apenas a variável “benefício unitário”, exprimindo o benefício proveniente de uma tonelada de tal-qual (run of mine), calculado do “custo” unitário

$$K = C_0 + (1 - R_0) C_1 + [(1 - R_0) R_1 + R_0] C_2 + [(1 - R_0) R_1 + R_0] (1 - R_2) C_3$$

e do “valor” unitário

$$P = \{ [(1 - R_0) R_1 + R_0] R_2 t_2 + [(1 - R_0) R_1 + R_0] (1 - R_2) R_3 t_3 \} V$$

logo, o referido “benefício” unitário será: $Z = p - K$

onde:

R_i – recuperações em peso

C_i – custos unitários por operação

t_i – teores dos produtos (% Fe no exemplo)

notando-se que R_i e t_i são variáveis regionalizadas e onde se considerou, no exemplo da jazida Matote, a existência

do “flow-sheet” simplificado da figura 10.17. Na expressão de Z anterior considerou-se que V é o “valor” da unidade em causa (1% Fe produzido).

Na verdade, a variável Z é calculada para cada amostra de cada sondagem (na verdade ela é uma combinação de VR's ponderadas por “custos” e “valores”).

Variogramas e curvas características (exemplo)

Para o caso concreto da jazida Matote este método foi usado para 3 sondagens (I, II e III). Para a variável Z os variogramas obtidos são os da figura 10.18, sendo que o variograma da parte A desta figura serviu para a obtenção dos parâmetros característicos (note-se o embricamento evidente); este variograma é da sondagem I.

A técnica do variograma corrente permitiu (após a definição da dimensão ótima de análise) a divisão da população total em dois conjuntos A e B, cujos variogramas são a parte B e C da figura referida (ainda só para a sondagem I). Estes variogramas mostram a estrutura global (figura 10.18 A) dividida em duas diferentes estruturas regionalizadas (figura 10.18 B e C), uma esférica e outra linear.

A curva característica da sondagem I está representada na figura 10.18 D.

As sondagens II e III foram também submetidas à mesma análise e os variogramas (global e das populações A e B) foram igualmente calculados (não se apresentam aqui). Assim, houve a possibilidade de se obterem os parâmetros X_G , X_H e X_L para as sondagens I, II e III.

A tomada de decisão (exemplo)

Dispondo-se de uma “carta de distâncias estruturais” entre cada sondagem e todas as outras, é óbvio que o nosso objetivo se alcança se a próxima sondagem for locada entre as duas sondagens que apresentam maior “distância estrutural”. Sob o ponto de vista enfocado uma nova sondagem IV não dará maior informação ou dará,

conforme a situação encontrada, tal como se mostra na figura 10.19 A.

No caso concreto da jazida Matote e das suas sondagens I, II, e III, com $\alpha = \beta = \gamma$, obteve-se:

$$D^{I,II} = 0,715$$

$$D^{I,III} = 0,567$$

$$D^{II,III} = 0,320$$

tal como se representa na figura 10.19 B. Desta figura pode-se dizer que a próxima sondagem a ser efetuada (a IV) deve estar entre I e II ($D^{I,II} > D^{I,III}$).

Este método, tal como já foi afirmado, permite obter informações também sobre a variabilidade e heterogeneidade interna de cada sondagem. As seguintes conclusões foram obtidas:

- “distâncias” ponderadas e normalizadas de uma parte, pertencente a A, para outra parte, pertencente a B, dentro de cada sondagem, podem ser usadas para classificar o “critério de corte” que permita melhorar aquela heterogeneidade em termos de beneficiamento:

$$II \rightarrow III \rightarrow I$$

- zonas homogêneas podem ser definidas em cada sondagem pela análise das suas curvas características; estas zonas são mostradas na Figura 10.19 C (escala métrica para todas as sondagens); nesta figura cada zona é caracterizada pelo valor de Z (benefício unitário) e pelo tipo do seu variograma.

Dependendo do evidenciado por IV a sondagem V será ou não no local marcado na Figura 10.19 B. A decisão passará por análise em tudo semelhante ao que acabou de ser exposto para decidir sobre a locação de IV.

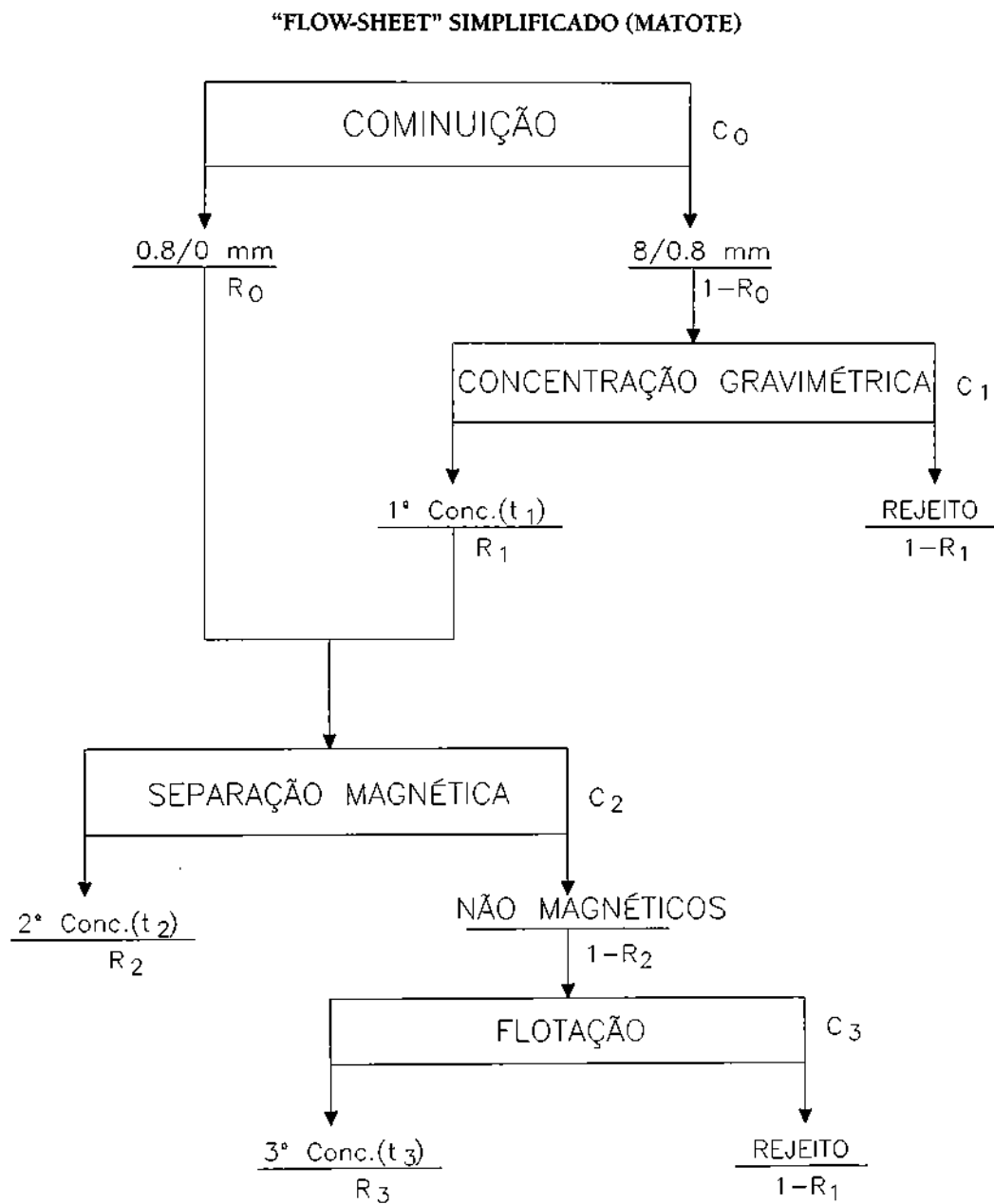
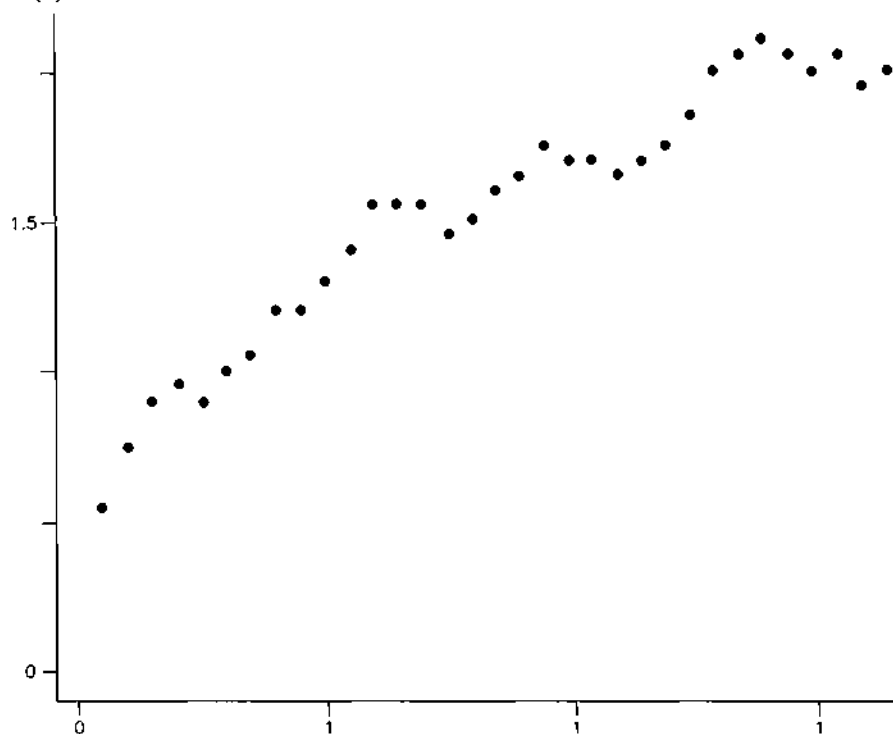


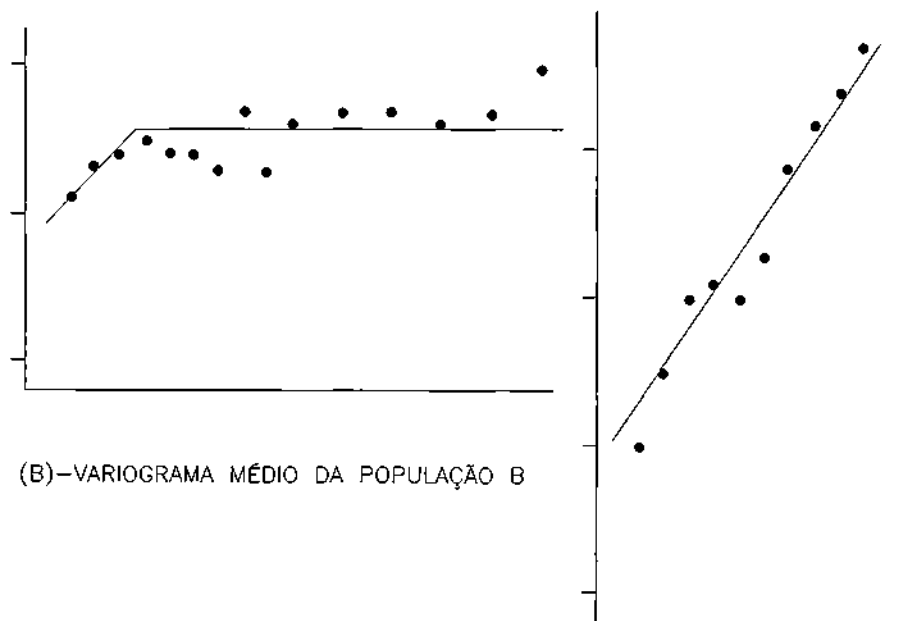
Fig. 10.17

VARIOGRAMAS E CURVA CARACTERÍSTICA DA SONDAGEM I (MATOTE)

(A) — VARIOGRAMA GLOBAL



(C) — VARIOGRAMA MÉDIO DA POPULAÇÃO A



(B) — VARIOGRAMA MÉDIO DA POPULAÇÃO B

Fig. 10.18

VARIOGRAMAS E CURVA CARACTERÍSTICA DA SONDAGEM I (MATOTE)

(D) - CURVA CARACTERÍSTICA DO FURO I (MATOTE)

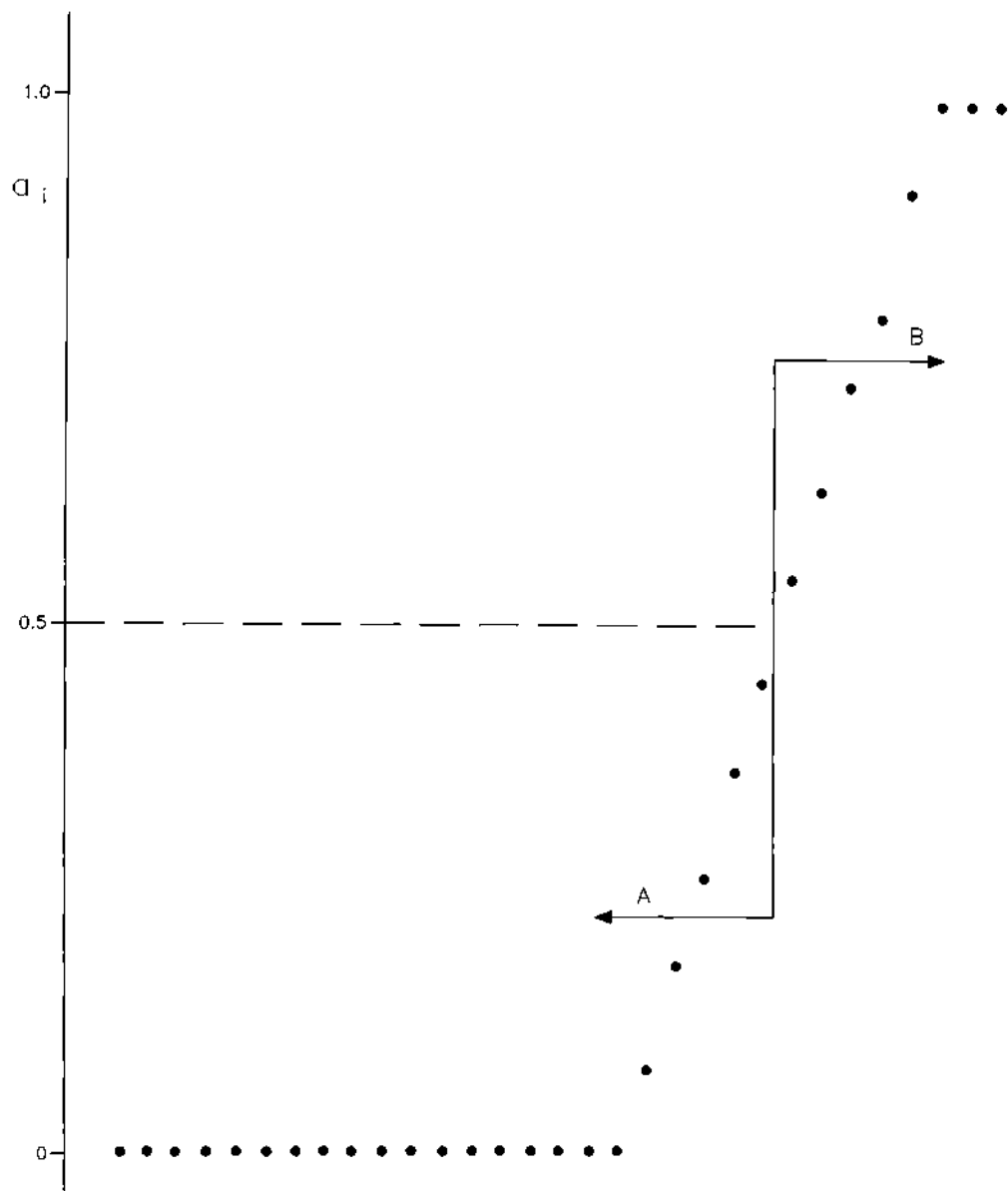
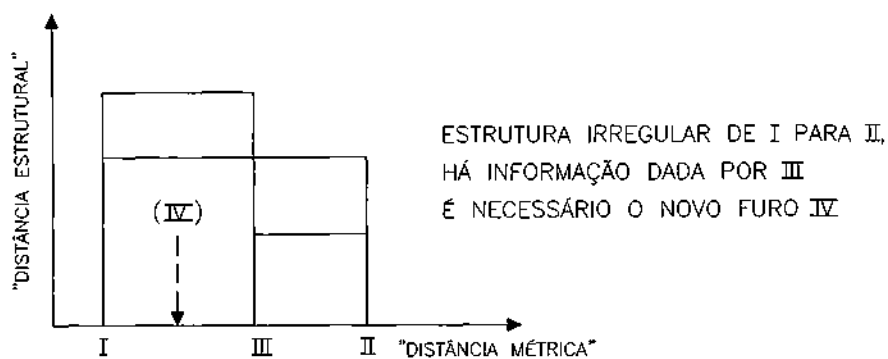
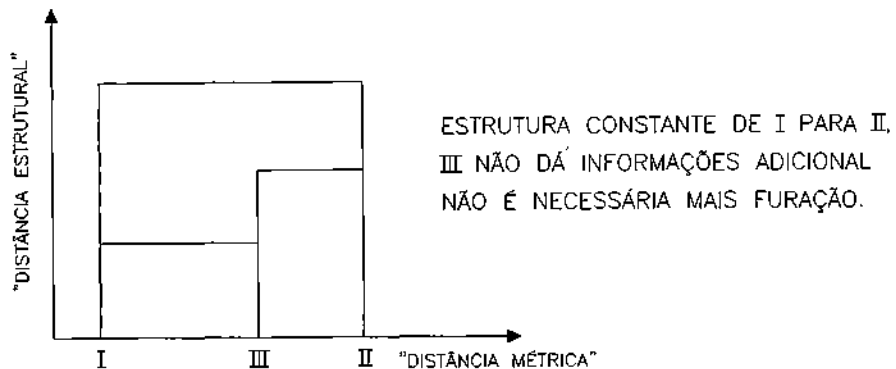


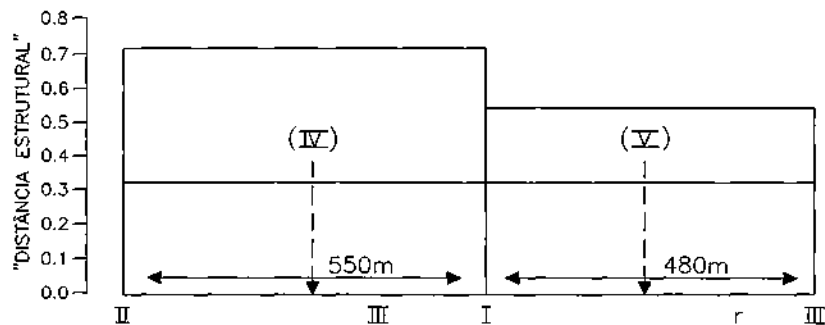
Fig. 10.18 Continuação

ANÁLISE VÁRIO-GRUPAL DECIDINDO SOBRE UM PROGRAMA DE SONDAGENS (MATOTE)

A-AS DECISÕES POSSÍVEIS

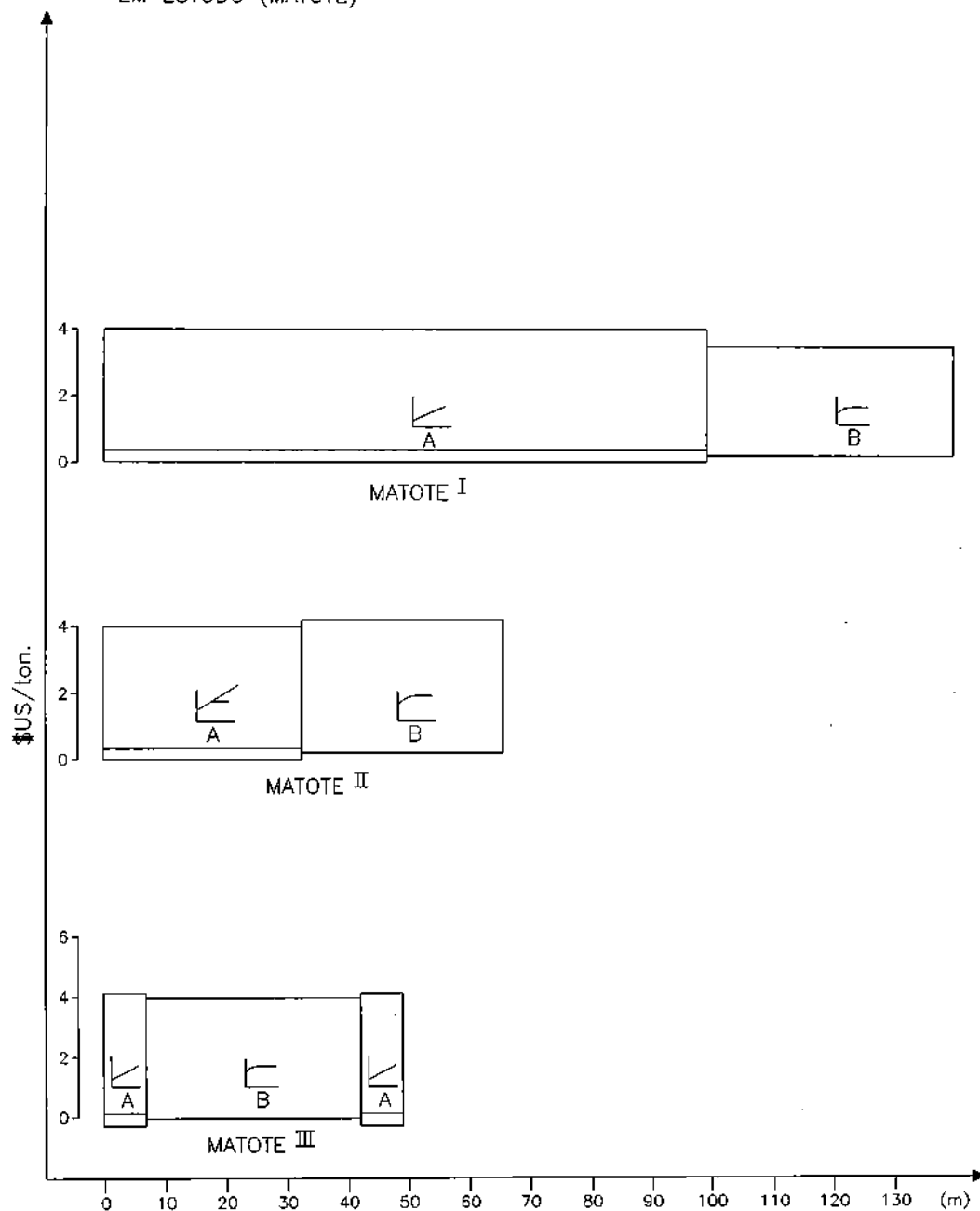


B-EXEMPLO DE DISTÂNCIAS ESTRUTURAIS E DA SUA TOMADA DE DECISÃO (MATOTE)



ANÁLISE VÁRIO-GRUPAL DECIDINDO SOBRE UM PROGRAMA DE SONDAGENS (MATOTE)

C → ZONAS HOMOGÊNEAS DETETADAS ATÉ O MOMENTO DA DECISÃO
EM ESTUDO (MATOTE)



Experiência brasileira em análise grupal

Ao que se sabe, no Brasil ainda não houve aplicação da análise vário-grupal, embora, já seja aplicada a análise grupal há vários anos.

Sabe-se que a Petrobrás usa freqüentemente a análise grupal, em diversos níveis dos seus empreendimentos, desde a escolha do local para novos furos até à interpretação dos dados obtidos, mas, em termos de estabelecimento de "tipologias" de minérios, só se conhecem três aplicações brasileiras da análise grupal:

1) a primeira data de 1976 e objetivou a demarcação de áreas homogêneas em vasta bacia carbonífera de Santa Catarina (o estudo considerou 7 variáveis caracterizantes e manipulou centenas de dados); e

2) a segunda e a terceira foram dirigidas à investigação de agrupamentos homogêneos, de tratamentos mineralúrgicos distintos entre si, de fosfatos (Patos de Minas em 1977 e Catalão em 1979), salientando-se a grande importância dos resultados obtidos no caso de Patos de Minas, onde o tratamento de dados da caracterização mineralógica não permitira estabelecer os "tipos" importantes, mesmo a nível de testes piloto (isso só foi possível com a aplicação da análise grupal); no caso concreto de Patos de Minas, os resultados desta análise grupal permitiram, também, definir os grupos de amostras com características e volumes adequados à realização de ensaios de beneficiamento (identificaram-se 6 grupos distintos) com êxito e muita utilidade no avanço do projeto.

Infelizmente a experiência brasileira nesta área não foi ainda objeto de qualquer comunicação científica e/ou publicação, permanecendo até hoje apenas em relatórios internos dos seus usuários, pelo que também aqui não pode ser apresentada.

Notas finais

A prática das análises grupal e vário-grupal está a generalizar-se por todo o mundo e o método tende a evoluir rapidamente, nomeadamente na delineação interna das jazidas minerais, sendo o suporte básico para se identificar, definir e delimitar cada "tipo" de mineralização, ou minério, dentro de uma jazida.

Atualmente já se conhecem tentativas de uso, também, no estudo de correionalizações (utilização de variogramas cruzados), especialmente para uso nos controle de pré-lavra e de lavra de urânio (Portugal, França, Canadá, etc.) onde as V.R.'s que se "cruzam" são teores químicos e radiométricos.

A análise vário-grupal é também aplicável em outros domínios (tal como a análise grupal, esta última até usada primeiro nesses outros domínios, antes de chegar à geologia) e tem revelado possibilidades interessantes quando usada para complementação de outras técnicas de análise multivariante de dados. Para maiores detalhes deve-se recorrer à bibliografia especializada.

Bibliografia

- Clark, Isobel (1979). *Practical Geostatistics*. Applied Science Publishers, London, 129 p.
- David, M. (1977). *Geostatistical Ore Reserve Estimation*. Elsevier, Amsterdam, 364 p.
- Davis, J. C. (1973). *Statistics and Data Analysis in Geology*. Wiley, New York, 550 p.
- Grossi Sad, J. H. (1986). *Fundamentos sobre a Variabilidade dos Depósitos Minerais*. DNPM-CPRM-GEOSOL, Rio de Janeiro, 141 p.
- Guerra, P. A. G. (1988). *Geoestatística Operacional*. Dep. Nac. Prod. Mineral, Brasília, 145 p.
- Journal, A. G. & Huijbregts Ch. J. (1978). *Mining Geostatistics*. Academic Press, London, 600 p.
- Kazhdan, A. B. (1988). *Prospección de Yacimientos Minerales*. Editorial MIR, Moscú, 376 p.
- Koch, G. S & Link, R. F. (1971). *Statistical Analysis of Geological Data*, Volume II. Wiley, New York, 438 p.
- Kreiter, V. M. (1968). *Geological Prospecting and Exploration* MIR. Moscow, 383 p.
- Kuzvart, M. & Böhmer, M. (1986). *Prospecting and Exploration of Mineral Deposits* Elsevier, Amsterdam, 508 p.
- Matheron, G. (1962). *Traité de Géostatistique Appliquée*. Editions Technip Paris, 333 p. (Mémoires du BRGM, 14).
- McKinstry, H. E. (1948). *Mining Geology*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 680 p.
- Peters, W. C. (1978). *Exploration and Mining Geology*. Wiley, New York, 689 p.
- Quade H. (1984). *Die Lagenteugelprediction in der Tektonik*. Clausthal – Zellerfeld. Ellen Pilger, Hefte 20, 196 p.
- Rendu, J. M. (1981). *An Introduction to Geostatistical Methods of Mineral Evaluation*. South African Inst. Mining and Metal., Johannesburg, 84 p.
- Turner, F. H. & Weiss, L. E. (1963). *Structural Analysis of Metamorphic Tectonites* McGraw-Hill, New York, 545 p.
- Valente, J. M. G. P. (1982). *Geomatemática. Lições de Geoestatística*. Vol. I a VIII, Fundação Gorceix, Ouro Preto, 2.173 p.
- Whitten, E. H. T. (1966). *Structural Geology of Folded Rocks*. Rand Mac Nally, Chicago, 671 p.

No presente trabalho seus autores prepararam um texto que apresenta, de modo amplo os temas relacionados aos princípios, fatores e métodos para a delineação dos depósitos minerais. Pela primeira vez o assunto, já abordado por diversos autores, é tratado de forma sistemática e abrangente.

A correta delineação de um depósito mineral tem como base a determinação do comportamento espacial do mesmo, em termos da forma, tamanho e atitude, de tal modo que a interrelação e a configuração entre esses parâmetros e o retículo de exploração são precisamente estabelecidas.

O trabalho destina-se aos estudantes de graduação e pós-graduação dedicados à exploração mineral e, também, aos geólogos, engenheiros geólogos e engenheiros de minas, como texto de consulta.

